VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Aplikace metod diskrétní matematiky při sestavování rozpisů sportovní střelecké soutěže

Application of Discrete Math Methods to Scheduling a Sport Shooting Competition

2015 Kateřina Volná

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Kateřina Volná**

Studijní program: N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor: 1103T031 Výpočetní matematika

Téma: Aplikace metod diskrétní matematiky při sestavování rozpisů sportovní střelecké soutěže
Application of Discrete Math Methods to Scheduling a Sport Shooting Competition

Zásady pro vypracování:

Při plánování sportovních turnajů (sestavení rozpisu zápasů) je kladen důraz na spravedlnost vzhledem ke všem soutěžícím. Aby byl rozpis spravedlivý, je při jeho sestavování nutno zohlednit celou řadu požadavků. Pro reálnou amatérskou soutěž ve střelbě, kdy se na různých střeleckých drahách utkají vždy dvojice střelců, je nutno uvážit například: počet účastníků soutěže, omezení počtu střeleckých drah, dostatečné, avšak ne příliš dlouhé přestávky mezi jednotlivými koly pro každého hráče, pravidelné střídání drah a na každé dráze pozice vlevo či vpravo.
Je typické, že složitost řešení kombinatorických problémů je závislá na paritě vstupních parametrů. Stejně u sestavování rozpisů této soutěže se ukázalo, že problém má vyšší úroveň složitosti předpokládáme-li zajištění spravedlivého rozlosování zápasů pro sudý počet přihlášených soutěžících. Diplomová práce by měla navazovat na výsledky řešení tohoto problému pro liché počty hráčů prezentované v bakalářské práci "Rozklady grafů při rozpisu střelecké soutěže" Kateřiny Volné.

Práci lze rozdělit do následujících částí:

- studium odborné literatury a článků zaměřených na losování sportovních soutěží,
- teoretický rozbor známých postupů teorie grafů a kombinatorických designů využívaných při losování sportovních soutěží,
- posouzení použitelnosti těchto metod pro řešení dané konkrétní úlohy,
- sestavování spravedlivých rozpisů především pro sudé počty hráčů.

Výsledkem práce by měl být algoritmický postup pro sestavení rozpisu v závislosti na zvoleném počtu účastníků soutěže a teoretický rozbor použitých metod.

Seznam doporučené odborné literatury:

- CH.J.Colbourn, J.H.Dinitz, *The CRC handbook of combinatorial designs*, Boca Raton, CRC Press (1996), ISBN 0- 8493-8948-8.
- C.C.Lindner, C.A.Rodger, *Design Theory*, USA, CRC Press (1997), ISBN 0-8493-3986-3.
- P. Kovář, *Teorie grafů* ,Učební text pro VŠB-TU Ostrava, (2012).
- Odborné články dle pokynů vedoucího práce.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Mgr. Tereza Kovářová, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2014

Datum odevzdání: 07.05.2015

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí katedry

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a že veškeré podklady, z nichž jsem čerpala, jsou řádně citovány a uvedeny v seznamu literatury.

V Ostravě dne 7. května 2015 ....Volná........

Ráda bych poděkovala své vedoucí diplomové práce Mgr. Tereze Kovářové, Ph.D za její odborné rady a čas, který mi věnovala při řešení daného problému. Také děkuji Mariuszi Meszkovi, Ph.D, M.Sc. z AGH UST v Krakově za poskytnutí přínosných materiálů.

Abstrakt

Inspirace pro tuto diplomovou práci vychází z reálného problému tvorby rozpisu zápasů sportovní střelecké soutěže pořádané formou turnaje. K tvorbě rozpisu turnaje je využito zejména kombinatorických designů, především speciálních typů designů zvaných balanced tournament design a factored balanced tournament design, dále i některé známé postupy teorie grafů. V práci jsou uvedeny různé konstrukce pro tvorbu rozpisu turnaje vzhledem k počtu hráčů, kteří se do soutěže přihlásili. Vzhledem k zajištění spravedlivých podmínek pro všechny hráče jsou shrnuty a porovnány výsledky rozpisů jednotlivých typů konstrukcí.

Klíčová slova: graf, turnaj, losování sportovní soutěže, kombinatorický design, balanced tournament design, factored balanced tournament design

Abstract

The thesis is inspired by a problem of constructing a schedule for the real sports shooting competition. In this competition every two players play one game against each other - it is a tournament. Combinatorial designs, primarily special types of designs called balanced tournament designs and factored ballanced tournament designs are used to find an optimal schedule. Further the known graph theory methods for tournament scheduling are used. In the thesis constructions of schedules are described depending on the number of registered players. Resulting schedules of all types of constructions are summarized and compared with the respect to an achievement of fair conditions for all players.

Keywords: graph, tournament, sports competition draw, combinatorial design, balanced tournament design, factored balanced tournament design

Seznam použitých zkratek a symbolů

$G = (V, E)$ - graf G s množinou vrcholů V a množinou hran E

K_n - kompletní graf na n vrcholech

$\deg(v)$ - stupeň vrcholu v

F - faktor grafu

L_n - latinský čtverec řádu n

$(\mathbb{Z}_n, +)$ - konečná grupa zbytkových tříd modulo n

$\mathbb{N}$ - množina přirozených čísel

$BTD(n)$ - balanced tournament design

$FBTD(n)$ - factored balanced tournament design

Obsah

1 Úvod 5

2 Definice základních pojmů 6

3 Rozpis dle latinských čtverců 12

4 Kombinatorické designy 14
 4.1 Balanced tournament design 15
 4.2 Konstrukce I - BTD(n) pro $n \equiv 0, 1 \pmod 3$ 17
 4.3 Konstrukce II - FBTD(n) pro n lichá 22
 4.4 Konstrukce III - FBTD(n) pro n sudá 29

5 Rozpisy dle BTD(n) 31
 5.1 Shrnutí výsledků 31
 5.2 Diskuze složitosti úlohy 33

6 Příklady rozpisů 34

7 Závěr 45

8 Literatura 47

Seznam obrázků

1 Nakreslení grafu G 6
2 Orientovaný graf D 6
3 Kompletní graf K_4 7
4 Podgraf grafu G 7
5 Faktor F_i kompletního grafu K_{2n} 8
6 Idempotentní latinský čtverec izomorfní s L_+ 12

Seznam tabulek

1 Kanonické losování pro 6 týmů . . . 9
2 Tabulka HAP . . . 9
3 Kanonické losování pro 6 týmů a tabulka HAP . . . 10
4 BTD(4) . . . 15
5 Tabulka A . . . 18
6 Tabulka A s pravidelným střídání hráčů vlevo a vpravo . . . 18
7 Tabulka A s vyznačenými dvojicemi . . . 18
8 BTD(4) . . . 19
9 Rozpis pro 8 hráčů na 2 střelnicích . . . 19
10 HAP tabulka pro 8 hráčů . . . 20
11 Obecný předpis neuspořádaných dvojic z množiny V . . . 23
12 Tabulka neuspořádaných dvojic dle vzorce 2 pro 10 hráčů . . . 24
13 Tabulka uspořádaných dvojic pro 10 hráčů . . . 25
14 Tabulka HAP pro 10 hráčů . . . 25
15 FBTD(5) s ohledem na střídání hráčů vlevo a vpravo . . . 25
16 A - FBTD(4) a tabulka B . . . 29
17 Výsledný design FBTD(8) . . . 30
18 Tabulka zápasů pro 4 hráče . . . 31
19 Počet operací . . . 33
20 Tabulka A pro 24 hráčů . . . 35
21 BTD(12) s ohledem na střídání hráčů vlevo a vpravo . . . 36
22 Rozpis pro 24 hráčů na 3 stanovištích . . . 38
23 Rozpis pro 24 hráčů na 4 stanovištích . . . 39
24 Tabulka A pro 14 hráčů . . . 40
25 BTD(7) s ohledem na střídání vpravo a vlevo . . . 41
26 HAP pro 14 hráčů dle konstrukce I . . . 41
27 Rozpis pro 14 hráčů na 4 stanovištích . . . 42
28 Tabulka neuspořádaných dvojic pro 14 hráčů . . . 43
29 Tabulka uspořádaných dvojic pro 14 hráčů . . . 43
30 HAP pro 14 hráčů dle konstrukce II . . . 44

31 FBTD(7) s ohledem na střídání pozic vlevo a vpravo 44

1 Úvod

Tato práce vychází z reálného problému losování sportovní soutěže. V našem konkrétním případě se jedná o soutěž ve střelbě na terč. Je žádoucí, aby vytvořený rozpis soutěže byl pro jednotlivé hráče spravedlivý, tj. aby splňoval následující požadavky.

Do soutěže se přihlásí N hráčů a je třeba zajistit jim rovnocenné podmínky. Každý hráč se během soutěže utká ve společné střelbě se všemi ostatními hráči. Takovému uspořádání soutěže říkáme turnaj. Souboj mezi každými dvěma hráči pak označujeme pojmem zápas. Turnaj se odehrává na určitém počtu střelnic a každá střelnice má právě dvě střelecké dráhy. Proto se na střelnici utká vždy jedna dvojice hráčů. Žádoucí je, aby se hráči spravedlivě prostřídali nejen na jednotlivých střelnicích, ale i na střeleckých dráhách, tzn. na pozicích vlevo a vpravo. Za spravedlivé rozlosování soutěže lze tedy považovat takové rozlosování, kdy každý hráč odehraje stejný počet zápasů na každé ze střelnic a během turnaje pokud možno pravidelně střídá levou a pravou pozici na střelnicích.

Neméně důležitý je i požadavek na rovnoměrné pauzy mezi zápasy, protože by nebylo spravedlivé, aby některý z hráčů odehrál všechny své zápasy hned na začátku a po zbytek turnaje odpočíval. Rovněž požadujeme, aby byl turnaj odehrán v co nejkratším čase, tj. aby byl v každém kole odehrán maximální počet zápasů. Pro sudý počet hráčů N je to právě $N/2$ zápasů, jelikož každého kola se účastní všichni hráči. Takové losování nazýváme kompaktní. Losování, které splňuje všechny tyto požadavky, kterými jsou střídání hráčů na střelnicích, střídání na pozicích vlevo a vpravo, rovnoměrné pauzy mezi zápasy a kompaktnost turnaje, nazýváme *harmonickým* losováním, nebo také *harmonickým* rozpisem.

V bakalářské práci jsme se zabývali tvorbou rozpisu turnajů zejména pro liché počty hráčů, k čemuž jsme využívali postupy a metody teorie grafů a také latinské čtverce. Postupy teorie grafů nám plně k vytvoření harmonického rozpisu turnaje nepostačovaly, jelikož pomocí těchto metod nebylo možné rozložit zápasy rovnoměrně na jednotlivé střelnice. S využitím latinských čtverců se nám pro liché počty hráčů harmonické rozložení zápasů podařilo. Stejný postup však pro sudé počty hráčů využít nelze. Se změnou parity základního parametru N se úloha stává mnohem obtížnější a je třeba hledat nové postupy řešení.

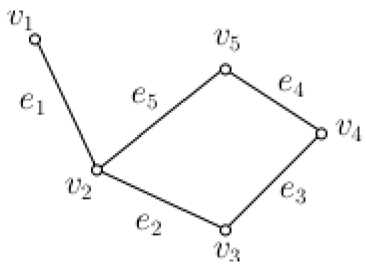
Cílem této práce je nalezení algoritmu pro tvorbu harmonického rozpisu turnaje, především pro sudé počty hráčů.

2 Definice základních pojmů

Sportovní soutěž pořádanou formou turnaje lze znázornit pomocí kompletních grafů. Proto zde pro lepší pochopení takto znázorněného turnaje uvedeme definice základních pojmů z oblasti teorie grafů. Definice jsme čerpali ze skript Teorie grafů od Petra Kováře [7].

Definice 2.1 *Jednoduchý graf G je uspořádaná dvojice* (V, E)*, kde V je neprázdná množina vrcholů a E je nějaká množina dvouprvkových podmnožin množiny V. Prvkům množiny E říkáme hrany.*

Na obrázku 1 je jednoduchý graf G s množinou vrcholů $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ a množinou hran $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, kde $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_2, v_3\}$, $e_3 = \{v_3, v_4\}$, $e_4 = \{v_4, v_5\}$, $e_5 = \{v_2, v_5\}$.

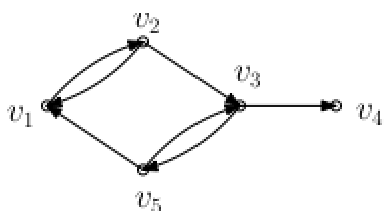


Obrázek 1: Nakreslení grafu G

Kromě jednoduchých grafů existují i multigrafy a orientované grafy. K losování sportovní soutěže dále využijeme orientované grafy, ve kterých je hranám přiřazena orientace.

Definice 2.2 *Mějme neprázdnou množinu vrcholů V. Dvojice (V,A), kde A je nějaká podmnožina kartézského součinu* $V \times V$ *(množina uspořádaných dvojic prvků z V), se nazývá orientovaný graf D.*

Příklad orientovaného grafu D je na obrázku 2. Hrany orientovaného grafu jsou uspořádané dvojice. Máme-li např. vrcholy v_1 a v_2 a orientovanou hranu (v_1, v_2), pak vrchol v_1 nazýváme výchozí a v_2 koncový vrchol. Mezi těmito dvěma vrcholy může být hrana (v_1, v_2) a zároveň i hrana (v_2, v_1).

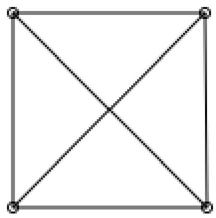


Obrázek 2: Orientovaný graf D

Mezi jednoduchými grafy rozlišujeme některé speciální třídy grafů. Pro naši další práci je nejdůležitější třída kompletních grafů.

Definice 2.3 *Graf na n vrcholech, který obsahuje všech $\binom{n}{2}$ možných hran, se nazývá kompletní graf a značí se K_n.*

Příklad kompletního grafu na čtyřech vrcholech je na obrázku 3. Kompletní graf je graf s maximálním počtem hran na daném počtu vrcholů, každý vrchol je incidentní s $n-1$ hranami a celkem kompletní graf obsahuje $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ hran.

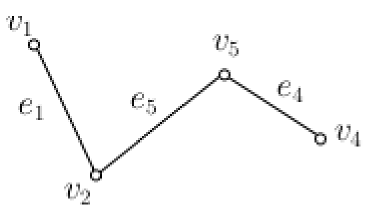


Obrázek 3: Kompletní graf K_4

Jak již bylo řečeno, turnaj může být modelován pomocí kompletního grafu na n vrcholech. Každý vrchol představuje jednoho hráče a každá hrana pak zápas mezi dvěma hráči.

Definice 2.4 *Mějme dán graf $G = (V, E)$. Řekneme, že graf $H = (V', E')$ je podgrafem grafu G, jestliže $V' \subseteq V$ a současně $E' \subseteq E$.*

Příklad podgrafu grafu G z obrázku 1 je na obrázku 4. Je patrné, že podgraf grafu G vznikl odstraněním hran e_2, e_3 a vrcholu v_3 z grafu G.



Obrázek 4: Podgraf grafu G

Speciálním případem je podgraf, který obsahuje všechny vrcholy původního grafu.

Definice 2.5 *Faktor grafu G je takový jeho podgraf $F = (V', E')$, který obsahuje všechny jeho vrcholy (tj. $V' = V$) a zároveň množina hran faktoru je podmnožinou množiny hran grafu G (tj. $E' \subseteq E$).*

Poznámka 2.6 *Faktoru, ve kterém jsou všechny vrcholy stupně jedna, říkáme 1-faktor. V kompletním grafu 1-faktor existuje, je-li počet vrcholů tohoto grafu sudý.*

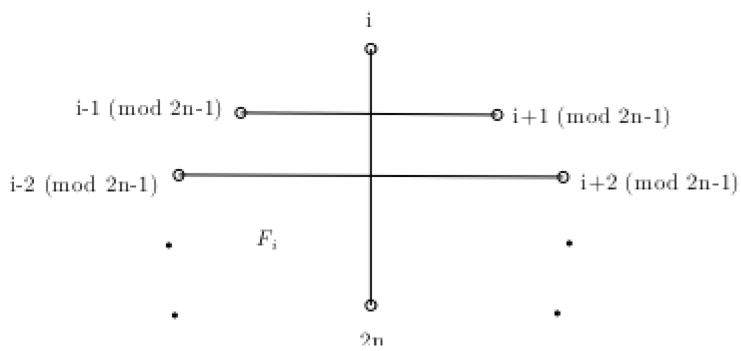
Turnaj se skládá z řady zápasů, ale všechny zápasy nemohou probíhat současně. Proto je nutné rozdělit turnaj do jednotlivých kol, k čemuž lze využít hranové rozklady grafů na 1-faktory, pokud existují.

Definice 2.7 *Faktorizace grafu G je takový systém faktorů $F_1, ..., F_k$, kde každé dva faktory jsou hranově disjunktní a sjednocením všech faktorů dostaneme právě graf G. Jestliže jsou navíc všechny faktory izomorfní $F_1 \simeq F_2 \simeq ... \simeq F_k \simeq H$, pak hovoříme o H-faktorizaci grafu G.*

Poznámka 2.8 *Speciálním případem je 1-faktorizace grafu G, kterou obdržíme rozložením grafu G na 1-faktory. Tj. v každém faktoru jsou všechny vrcholy stupně právě jedna.*

Následující definice nám říká, jak rozdělit zápasy turnaje do jednotlivých kol pro sudý počet hráčů.

Definice 2.9 [14] *Označme F_1,F_2,....,F_{2n-1} 1-faktory kompletního grafu K_{2n}. Faktorizace se nazývá kanonickou, jestliže $F_i = \{\{2n, i\}\} \cup \{\{i+k, i-k\};\ k = 1, 2, ..., n-1,$ $i = 1, ..., 2n-1\}$, kde čísla $i+k$ a $i-k$ jsou vyjádřena jedním z čísel $1, 2, ..., 2n-1$ $(\mathrm{mod}\ 2n-1)$.*



Obrázek 5: Faktor F_i kompletního grafu K_{2n}

Každá hrana grafu představuje jeden zápas mezi dvěma hráči. Faktor F_i obsahuje hrany znázorňující všechny zápasy hrané v i tém kole turnaje, viz obrázek 5.

V tabulce 1 je uveden příklad rozpisu zápasů do jednotlivých kol turnaje dle kanonické faktorizace pro 6 týmů.

Pro řešení problému nalezení spravedlivého neboli harmonického rozpisu střelecké soutěže je potřeba zajistit střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo na střelnicích. K tomu využijeme tabulku, která se anglicky nazývá „Home-Away-Pattern“, zkráceně HAP [13]. V tabulce budeme pojmy „Home“ a „Away“ značit pouze H a A, přičemž tato terminologie vychází ze sestavování hokejových nebo fotbalových turnajů. Hraje-li tým A ve svém městě a tým B na utkání přicestoval, říká se, že tým A hraje doma (Home) a tým B hraje venku (Away). Cílem je, aby se všem týmům střídaly zápasy doma a venku co nejvíce, jelikož se

	0	1	2
F_1	61	25	34
F_2	62	31	45
F_3	63	42	51
F_4	64	53	12
F_5	65	14	23

Tabulka 1: Kanonické losování pro 6 týmů

dá předpokládat, že tým, který bude hrát doma, bude ve výhodě oproti druhému týmu, jelikož zde bude mít podporu publika. Příklad HAP tabulky pro 6 týmů je v tabulce 2.

tým,kolo	1	2	3	4	5
1	H	A	H	$\underline{H}$	A
2	A	$\underline{A}$	H	A	$\underline{A}$
3	A	H	$\underline{H}$	A	H
4	H	$\underline{H}$	A	$\underline{A}$	H
5	H	A	$\underline{A}$	H	$\underline{H}$
6	A	H	A	H	A

Tabulka 2: Tabulka HAP

Řekneme, že má daný tým v daném kole „brejk", jestliže hraje doma (resp. venku) a v předchozím kole hrál také doma (resp. venku). Výsledný počet brejků losování tedy určíme na základě rozmístění zápasů turnaje. V tabulce na obrázku 2 jsou brejky znázorněny podtržením a celkem má losování právě 8 brejků. Naším cílem je to, aby se zápasy doma a venku co nejvíce střídaly a aby měly všechny týmy pokud možno stejný počet brejků.

Pro sestavení losování s co nejmenším počtem brejků využijeme orientaci hran z důkazu následující věty z článku [14]. Losování se nazývá kompaktní, jestliže se každého kola účastní všichni hráči. Pro lichý počet hráčů je losování kompaktní, jestliže se každého kola účastní všichni až na jednoho.

Věta 2.10 [14] *Existuje kompaktní losování K_{2n} s $2n-2$ brejky a to je nejlepší možné, vzhledem k minimálnímu počtu brejků.*

1. *Pro každé i, $i = 1, 2, ..., 2n-1$, se hrana $\{2n, i\}$ orientuje jako $(i, 2n)$, jestliže i je liché nebo jako $(2n, i)$, jestliže i je sudé.*

2. *Pro každé i, $i = 1, 2, ..., 2n-1$, a k, $k = 1, 2, ..., n-1$, se hrana $\{i+k, i-k\}$ orientuje jako $(i+k, i-k)$, jestliže k je liché nebo jako $(i-k, i+k)$, jestliže k je sudé.*

Kanonické losování pro 6 týmů s určenou orientací hran a související HAP jsou uvedeny v tabulce 3. Jak vidíme, v tomto případě se v HAP tabulce vyskytují pouze 4 brejky a docílili jsme tak nejmenšího možného počtu brejků.

i,k	0	1	2
F_1	$\overleftarrow{61}$	$\overrightarrow{25}$	$\overleftarrow{34}$
F_2	$\overrightarrow{62}$	$\overrightarrow{31}$	$\overleftarrow{45}$
F_3	$\overleftarrow{63}$	$\overrightarrow{42}$	$\overleftarrow{51}$
F_4	$\overrightarrow{64}$	$\overrightarrow{53}$	$\overleftarrow{12}$
F_5	$\overleftarrow{65}$	$\overrightarrow{14}$	$\overleftarrow{23}$

tým,kolo	1	2	3	4	5
1	A	H	A	H	A
2	A	H	$\underline{H}$	A	H
3	H	A	$\underline{A}$	H	A
4	A	H	A	H	$\underline{H}$
5	H	A	H	A	$\underline{A}$
6	H	A	H	A	H

Tabulka 3: Kanonické losování pro 6 týmů a tabulka HAP

Pro lichý počet hráčů nelze sestavit zcela kompaktní losování, protože v každém kole musí alespoň jeden hráč (lichý) odpočívat, avšak lze zajistit ideální podmínky vzhledem ke střídání zápasů doma a venku.

Věta 2.11 [14] *Existuje kompaktní losování K_{2n-1} do $2n-1$ kol bez brejků.*

Pro náš případ sportovní střelecké soutěže budeme HAP tabulku využívat ke střídání hráčů na pozicích jednotlivých střelnic. Home reprezentuje na střelnici pozici vlevo a Away představuje pozici vpravo. Budeme tedy zapisovat L místo H a P místo A.

Dalším požadavkem turnaje je spravedlivé střídání hráčů na stanovištích (střelnicích). Zde uvedené postupy nám však kontrolu nad rozmístěním zápasů na jednotlivá stanoviště neumožňují. Tento problém budeme řešit s využitím dalšího nástroje diskrétní matematiky, kterým jsou kombinatorické designy.

Na závěr této kapitoly si ještě upřesníme pojem harmonického losování v následující definici.

Definice 2.12 *Losování, které splňuje následující požadavky, nazýváme losování harmonické.*

1. *Losování je kompaktní. (Každého kola se účastní všichni hráči, pro lichý počet hráčů se účastní všichni až na jednoho.)*
2. *Losování má nejmenší možný počet brejků. (Každý hráč střídá co nejlépe pozice vlevo a vpravo.)*
3. *Je zajištěno nejlepší možné střídání hráčů na střelnicích. (Každý hráč během turnaje prostřídá všechny střelnice, přičemž pro N liché odehraje na každé střelnici stejný počet zápasů a pro N sudé stejný počet zápasů, až na jednu střelnici, kde bude počet zápasů u jeden méně.)*
4. *Jsou zajištěny srovnatelné pauzy mezi odehranými zápasy pro všechny hráče.*

Poznámka 2.13 *Za kompaktní losování považujeme i takové, ve kterém rozdělujeme jednotlivá kola na podkola, přičemž počet zápasů jednoho kola je dělitelný počtem zápasů podkola.*

Jestliže počet stanovišť odpovídá počtu zápasů jednoho kola, pak jsou pauzy mezi zápasy pro každého hráče nulové a losování nazýváme ryze harmonické.

Pro takové počty hráčů, kdy počet zápasů jednoho kola odpovídá počtu střelnic, lze požadavky 1 a 4 zajistit velmi snadno a v případě, že jsou splněny i požadavky 2 a 3, jsme schopni vytvořit ryze harmonické losování. V případě, že počet zápasů jednoho kola přesně neodpovídá počtu střelnic, ale je tímto počtem dělitelný, principielně není možno zajistit všem hráčům stejné pauzy mezi zápasy. Při dělení na podkola jsme schopni zajistit srovnatelné pauzy, tj. pauzy z intervalu, kde délka tohoto intervalu je dána počtem podkol, jichž se daný hráč neúčastní.

3 Rozpis dle latinských čtverců

V bakalářské práci [12] jsme se zabývali losováním sportovní střelecké soutěže pro lichý počet hráčů. K sestavování rozpisů turnaje jsme využívali jak rozklad kompletního grafu, tak i latinské čtverce.

Pro liché počty hráčů $2n-1$ vychází rozdělení zápasů do kol z kanonické faktorizace kompletního grafu K_{2n} na $2n$ vrcholech. Hráčům turnaje odpovídá $2n-1$ vrcholů a poslední vrchol $2n$ je v tomto případě nadbytečný. Hrana $e_\infty = \{2n, i\}$ představuje v i tém kole zápas, který se nehraje, tj. i tý hráč odpočívá.

Pro rozdělení zápasů na jednotlivá stanoviště bylo zapotřebí nalézt další nástroje. V bakalářské práci jsme využili transverzály idempotentního latinského čtverce (základní pojmy z oblasti latinských čtverců jsou uvedeny např. v [12]). Kanonická faktorizace K_{2n} lze totiž ekvivalentně zapsat pomocí latinského čtverce lichého řádu $2n-1$, což bylo podrobně rozebráno v bakalářské práci [12]. Latinský čtverec L_+ jsme vytvořili pomocí operace sčítání modulo $2n-1$ a následnou permutací symbolů jsme dostali izomorfní idempotentní čtverec. Sloupcové a řádkové indexy představují hráče. Symbol v latinském čtverci pak představuje kolo turnaje, ve kterém se utkají hráči odpovídající řádkovému a sloupcovému indexu. Takový latinský čtverec je symetrický, což plyne z komutativity operace +. K vytvoření rozpisu nám stačí jen polovina čtverce, nad nebo pod hlavní diagonálou. Hlavní diagonála čtverce představuje kola, ve kterých hráč s odpovídajícím řádkovým (resp. sloupcovým) indexem odpočívá.

Na obrázku 6 vidíme příklad idempotentního latinského čtverce řádu 5, který je izomorfní s L_+.

+	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5

$\approx$

	1	2	3	4	5
1	1	4	2	5	3
2	4	2	5	3	1
3	2	5	3	1	4
4	5	3	1	4	2
5	3	1	4	2	5

Obrázek 6: Idempotentní latinský čtverec izomorfní s L_+

Latinské čtverce nám oproti kanonické faktorizaci umožňují provést rozložení zápasů na jednotlivá stanoviště. K tomu lze využít transverzály idempotentního latinského čtverce, kdy každá transverzála odpovídá jednomu stanovišti. Transverzála je množina n buněk, vybraných právě jedna buňka z každého sloupce a řádku, obsahující každý z n symbolů právě jednou. Jelikož se na transverzále vyskytuje každý symbol právě jednou, znamená to, že transverzála vybere vždy z každého kola jeden zápas. Každého hráče však vybere transverzála dvakrát, jednou jako sloupcový index a podruhé jako řádkový index. Dále jsme ukázali, že v latinském čtverci lichého řádu izomorfním s L_+, který byl využit v bakalářské práci, je právě n disjunktních transverzál, tedy že zde nalezneme vždy alespoň tolik transverzál, kolik je stanovišť.

Pro liché počty hráčů jsme tak vytvořili rozpisy turnajů, kdy se všichni hráči spravedlivě prostřídají na jednotlivých stanovištích.

Turnaj pro sudý počet hráčů modelujeme kompletním grafem K_{2n} na $2n$ vrcholech. K rozdělení zápasů do jednotlivých kol lze opět vyjít z kanonické faktorizace tohoto grafu. Pro sudý počet hráčů $2n$ dostaneme $2n-1$ faktorů, resp. kol. Každého kola se účastní všichni hráči. Rozpis dle kanonické faktorizace lze opět ekvivalentně zapsat latinským čtvercem lichého řádu, kde nyní hlavní diagonála čtverce nenese informaci o hráčích, kteří odpočívají, ale o zápasech posledního hráče $2n$. Pro rozdělení zápasů na jednotlivá stanoviště se tedy opět naskýtá myšlenka využít transverzály latinského čtverce. Zkoušeli jsme různé způsoby výběru transverzál, avšak neúspěšně. Buňky hlavní diagonály odpovídají zápasům s hráčem $2n$, tedy jeli buňka i tého řádku a sloupce vyplněna symbolem p, $1 \leq p \leq 2n-1$, znamená to, že hráč i hraje s hráčem $2n$ v kole p. Hlavní diagonála v L_+ je transverzálou. Výběr této transverzály by však odpovídal situaci, kdy hráč $2n$ odehraje všechny své zápasy na jedné střelnici. Střídání hráče $2n$ na různých střelnicích by odpovídal takový výběr transverzál, kdy každá transverzála obsahuje nejvýše dvě buňky hlavní diagonály. Po mnoha různých pokusech, jak vhodně vybrat transverzály, se domníváme, že takový výběr transverzál neexistuje.

K losování sportovní střelecké soutěže pro sudý počet hráčů proto využijeme kombinatorické designy, konkrétně balanced tournament design (BTD). Jsou možné různé konstrukce těchto designů, které obvykle nezahrnují všechny potřebné počty hráčů.

4 Kombinatorické designy

Teorie designů je součástí diskrétní matematiky. Tato teorie se zabývá existencí, konstrukcemi a zkoumáním vlastností systémů podmnožin konečných množin. Jde o systémy vyznačující se řadou symetrií s takovým uspořádáním prvků, aby byl systém v různých aspektech vyvážený, např. aby měly všechny podmnožiny stejnou velikost, aby se v systému vyskytoval každý prvek stejný počet krát, nebo aby se každý prvek vyskytoval ve stejném počtu podmnožin systému, aj.

Za počátek studia blokových designů může být považován rok 1830, ve kterém se německý matematik Julius Plücker začal zabývat studiem rovinných kubických křivek řádu 3. V roce 1835 vydal knihu, ve které uvedl následující tvrzení. Může-li být systém, který obsahuje n bodů, uspořádán do trojic tak, aby se každé dva body vyskytovaly vždy právě v jedné trojici, pak $n \equiv 3 \pmod 6$. V roce 1839 vydal další knihu, ve které své tvrzení opravil a dokázal, že daný systém existuje pro všechny řády $n \equiv 1, 3 \pmod 6$. V roce 1847 ukázal britský matematik Thomas Kirkman jak takový systém zkonstruovat pro všechna možná n. Avšak v roce 1853 napsal švýcarský matematik Jakob Steiner krátký článek o systémech trojic a znovu dokázal tvrzení, že systémy trojic obsahující n bodů existují pouze pro $n \equiv 1, 3 \pmod 6$. Ve svém článku se také zabýval otázkou, jak systém zkonstruovat, přestože tento problém vyřešil již o šest let dříve Kirkman. Situace se však ještě více zkomplikovala, když M. Reiss představil své řešení Steinerova problému, které navíc zahrnovalo velmi podobné metody, které již ke konstrukci využil Kirkman.

Nakonec byl zaveden termín Steinerovský systém trojic, přestože první, kdo systém trojic vytvořil byl Kirkman, a proto by měl být systém pojmenován podle něj. Jméno Thomas Kirkman je však neodmyslitelně spjato se slavným problémem 15 školaček. Školačky odchází ze školy ve trojicích po sedm dní. Cílem je najít takové uspořádání školaček, aby spolu žádná dvojice dívek nešla ve trojici dvakrát za týden. Jako první vyřešil tento problém v roce 1850 Arthur Cayley a ještě tentýž rok i sám Kirkman, jehož řešení zahrnovalo kombinaci STS(7) a Roomova čtverce [15].

Studium teorie designů jakožto matematické disciplíny propuklo až ve dvacátém století díky aplikacím designů a analýze statistických experimentů. Designy mají mnoho různých aplikací, např. plánování turnajů, loterie, analýza a konstrukce algoritmů a kryptografie. Nejčastějšími otázkami v teorii designů jsou otázky existence. V dnešní době tato oblast obsahuje mnoho existenčních výsledků, nicméně i přesto zde zůstává mnoho otevřených problémů zabývajících se existencí určitých typů designů [11].

Mezi základní designy patří balanced incomplete block design (BIBD), t-design a symetrický BIBD, což jsou blokové designy, dále pak pairwise balanced design (PBD) nebo Hadamard design. Ostatní kombinatorické designy byly studiem vyvinuty z těchto základních designů, nebo s nimi souvisí [4]. Mezi ostatní designy se řadí např. i balanced tournament design (BTD), který budeme v práci dále využívat.

4.1 Balanced tournament design

Začneme definicí hlavního designu, se kterým budeme pracovat.

Definice 4.1.1 *Balanced tournament design řádu n, BTD(n), definovaný na 2n-prvkové množině V, je seřazení $\binom{2n}{2}$ různých neuspořádaných dvojic prvků množiny V do tabulky řádu $n \times 2n - 1$, pro kterou platí:*

1. *každý prvek množiny V je obsažen právě v jedné buňce každého sloupce,*
2. *každý prvek množiny V je obsažen v maximálně dvou buňkách každého řádku.*

V tabulce 4 je uveden příklad BTD(4), který sestrojil s použitím počítače Evi Nemeth [10].

34	56	12	78	45	67	83
16	24	35	46	28	13	57
27	18	47	15	36	48	26
58	37	68	23	17	25	14

Tabulka 4: BTD(4)

Tento design představuje rozlosování turnaje pro $2n$ hráčů, kde je pro umístění zápasů k dispozici n rovnocenných stanovišť, která odpovídají počtu řádků designu. Turnaj je odehrán v $2n - 1$ kolech, která odpovídají sloupcům designu. Sloupcová podmínka tedy znamená, že se každého kola zúčastní všech $2n$ hráčů. Řádková podmínka znamená, že na každém stanovišti hraje daný hráč během turnaje nejvýše dvakrát.

Sloupce BTD(n) nám dávají 1-faktorizaci kompletního grafu na $2n$ vrcholech, K_{2n}.

Bylo ukázáno, že BTD(n) existuje skoro pro všechna n. Existenční důkaz s využitím teorie grup uvedl v roce 1977 Schellenberg a důkaz je uveden v [10].

Existují různé druhy konstrukce BTD(n). Bohužel dle námi dostupných zdrojů [3], [14], [1] není známá jednotná konstrukce pro všechna n. Jednotlivé konstrukce se liší v závislosti na modularitě n a jsou různě složité.

Ke konstrukcím BTD(n) budeme využívat některé pojmy z teorie grup, např. „cosety“ (definici lze najít např. v [6]), nebo „startery“. Starterem je algebraická struktura, jejíž přesný popis je uveden např. v [3]. V následující definici je uveden příklad jednoduchého starteru.

Definice 4.1.2. *V každé cyklické abelovské grupě G lichého řádu je starterem množina dvojic $P = \{\{x, -x\} : x \in G, x \neq 0_G\}$. Množina P se nazývá „patterned starter“.*

Poznámka 4.1.3. *Budeme používat anglický název patterned starter, jelikož český ekvivalent se nepoužívá.*

Například v konečné aditivní grupě $\mathbb{Z}_7$ je patterned starterem množina $P = \{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$.

Následuje několik konstrukcí, které umožňují sestavit losování pro různé počty hráčů. Jednotlivé konstrukce nejsou navzájem disjunktní.

4.2 Konstrukce I - BTD(n) pro $n \equiv 0, 1 \pmod 3$

Začneme konstrukcí, která vychází z kanonické faktorizace. Sestrojíme tabulku A řádu $n \times 2n-1$, dle vzorce 1. Sloupce odpovídají jednotlivým faktorům, resp. kolům turnaje. Množina dvojic prvního sloupce, faktoru F_0, je patterned starter nad grupou $\mathbb{Z}_{2n-1}$, kromě navíc přidané dvojice $\{\infty, 0\}$, kde symbolem ∞ označujeme hráče $2n$. Každý další sloupec tabulky A dostaneme přičtením prvku i k faktoru F_0, pro $i = 0, 1, ..., 2n-2$.

$$F_i = F_0 + i = [\{\infty, i\} \ \cup \{k+i, -k+i\} : k = 1, ..., n-1]^T. \tag{1}$$

Všechny výpočty jsou provedeny v modulární aritmetice, vzhledem k modulu $(2n-1)$. Výsledná tabulka je obyčejné rozlosování dle kanonické faktorizace, které je také známo pod názvem patterned tournament design.

V takto vytvořené tabulce není ošetřeno střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo, orientaci hran určíme dle Věty 2.10. Pro i tý faktor F_i dvojici hráčů uspořádáme jako (∞, i) pro i sudé a (i, ∞) pro i liché. Ostatní dvojice hráčů uspořádáme dle parity koeficientu k, kde $k = \ 1, ..., n-1$. Jeli k liché, pak ponecháme uspořádanou dvojici $(k+i, -k+i)$, jeli k sudé, pak hranu orientujeme jako $(-k+i, k+i)$. Touto orientací hran je zajištěn i nejmenší možný počet $2n-2$ brejků.

Dále se budeme zabývat rozmístěním zápasů na jednotlivá stanoviště. Abychom zajistili řádkovou podmínku BTD(n), provedeme vhodné prohození některých zápasů vždy v rámci jednoho kola. Konkrétně se jedná o dvojice hráčů $\{\infty, i\}$ a $\{3i+1, -i-1\}$ ve sloupci i, pro $i \neq n-1$.

Následující věta říká, pro které hodnoty n můžeme tuto konstrukci využít k tvorbě BTD(n). Důkaz této věty vyplývá z výsledků uvedených v článku [5]. Poprvé dle této konstrukce vytvořil BTD(n) Robert Gray v roce 1977.

Věta 4.2.1 *BTD(n) existuje pro* $n \equiv 0, 1 \pmod 3$.

Příklad BTD(n) pro n=4 dle konstrukce I

Vytvoření BTD(n) si ukážeme na příkladu pro $n = 4$, tedy 8 hráčů. Protože $4 \equiv 1 \pmod 3$, můžeme k vytvoření designu využít výše popsanou konstrukci I. Nejdříve sestrojíme tabulku A o velikosti 4×7, kde i tý sloupec tabulky je dán vzorcem

$$F_i = F_0 + i = [\{\infty, i\} \ \cup \{k+i, -k+i\} : k = 1, ..., 3]^T,$$

pro $i = 0, 1, ..., 6$. Řádky jsou označeny pomocí rozdílů mezi prvky odpovídajících dvojic, modulo 7. Vytvořenou tabulku A vidíme v tabulce 5.

Nyní zvolíme orientaci hran dle výše popsaného způsobu. Všimněme si, že pořadí prvků budeme měnit pouze v prvním a třetím řádku tabulky A, viz tabulka 6. První řádek obsahuje pouze dvojice typu $\{\infty, i\}$, kde orientaci provádíme na základě parity i a třetí řádek obsahuje pouze dvojice hráčů, pro které je koeficient k lichý, a proto v tomto řádku

∞	∞ 0	∞ 1	∞ 2	∞ 3	∞ 4	∞ 5	∞ 6
± 2	1 6	2 0	3 1	4 2	5 3	6 4	0 5
± 3	2 5	3 6	4 0	5 1	6 2	0 3	1 4
± 1	3 4	4 5	5 6	6 0	0 1	1 2	2 3

Tabulka 5: Tabulka A

provedeme prohození prvků ve všech dvojicích. Pro zbylé dva řádky je koeficient k sudý, tudíž orientaci neměníme.

∞	∞ 0	1 ∞	∞ 2	3 ∞	∞ 4	5 ∞	∞ 6
± 2	1 6	2 0	3 1	4 2	5 3	6 4	0 5
± 3	5 2	6 3	0 4	1 5	2 6	3 0	4 1
± 1	3 4	4 5	5 6	6 0	0 1	1 2	2 3

Tabulka 6: Tabulka A s pravidelným střídání hráčů vlevo a vpravo

K získání výsledného BTD(4) zbývá prohodit dvojice $\{\infty, i\}$ a $\{3i+1, -i-1\}$ ve sloupci i, pro $i = 0, 1, 2, 4, 5, 6$. V i tém kole se tak prohodí dvojice $\{\infty, i\}$ spolu s dvojicí, jejíž rozdíl je $\pm((3i+1) - (-i-1)) = \pm(4i+2)$, proto na základě tohoto rozdílu, vzhledem k modulu $(2n - 1)$, přeuspořádáme řádky tabulky. Díky přeuspořádání řádků tak dostáváme přehlednější tabulku, ze které je lépe vidět, které dvojice se v jednotlivých kolech prohazují. V tabulce 7 vidíme tabulku A se zvýrazněnými dvojicemi, které budeme prohazovat s dvojicí $\{\infty, i\}$.

∞	∞ 0	1 ∞	∞ 2	3 ∞	∞ 4	5 ∞	∞ 6
± 2	**1 6**	2 0	3 1	4 2	5 3	6 4	**0 5**
± 1	3 4	**4 5**	5 6	6 0	0 1	**1 2**	2 3
± 3	5 2	6 3	**0 4**	1 5	**2 6**	3 0	4 1

Tabulka 7: Tabulka A s vyznačenými dvojicemi

Po prohození uvedených dvojic dostáváme výsledný BTD(4), který je uveden v tabulce 8. Symbolem ∞ značíme hráče $2n$, v našem konkrétním příkladu hráče č. 8, jelikož výpočty provádíme v grupě $\mathbb{Z}_{2n-1}$ a v té se symbol $2n$ nevyskytuje. Ve výsledné tabulce jsou 4 řádky, tzn. turnaj lze odehrát na 4 stanovištích tak, že každý z hráčů hraje na 3 stanovištích právě $2\times$ a na jednom stanovišti $1\times$. Toto je nejrovnoměrnější možné rozložení zápasů na 4 stanoviště.

Nejmenší počet hráčů, pro který lze konstrukci I využít je 6 hráčů, dále pak 8, 12, 14, 18, 20 hráčů atd. Pro vyšší počty hráčů se počet zápasů kola navyšuje, avšak v naší střelecké soutěži je v reálu k dispozici malý počet stanovišť (střelnic). Turnaj se odehrává

1 6	4 5	0 4	3 ∞	2 6	1 2	0 5
∞ 0	2 0	3 1	4 2	5 3	6 4	∞ 6
3 4	1 ∞	5 6	6 0	0 1	5 ∞	2 3
5 2	6 3	∞ 2	1 5	∞ 4	3 0	4 1

Tabulka 8: BTD(4)

na 2,3 nebo 4 střelnicích. Toto omezení si vynutí při větším počtu hráčů rozdělení zápasů do podkol. Např. pro 12 hráčů má výsledný design 6 řádků, tzn. v každém kole se odehraje právě 6 zápasů, proto bude nejvhodnější využít právě 3 střelnice, jelikož počet zápasů kola je dělitelný třemi. Jestliže však máme vytvořit rozpis turnaje např. pro 14 hráčů, pak počet zápasů jednoho kola, sedm, je prvočíslo, což není dělitelné počtem střelnic. Jednou z možností, jak zajistit rovnocenné podmínky je upustit od kompaktního rozpisu a rozdělit kolo do podkol se 4 nebo 3 zápasy (viz 1. a 2. příklad v kapitole 6).

V následující větě shrneme, pro které počty hráčů $2n$ a pro které hodnoty s počtu střelnic umíme na základě konstrukce I sestavit harmonický rozpis turnaje.

Pro sudý počet hráčů $2n$, kde $n \equiv 0,1 \pmod 3$ je počet zápasů jednoho kola n. Jestliže je počet zápasů n dělitelný počtem střelnic s, potom platí, že $n = p \cdot s$, kde $p \in \mathbb{N}$. Pro počet hráčů $2n$ tedy platí $n = p \cdot s$ a tedy $n \equiv 0 \pmod s$, nebo ekvivalentně $2n \equiv 0 \pmod{2s}$. Je-li počet hráčů dělitelný dvojnásobkem počtu střelnic a současně odpovídá podmínkám konstrukce I, umíme s využitím BTD(n) sestavit kompaktní losování, které bude harmonické.

Věta 4.2.2 *Pro počet hráčů $2n$, kde $n \equiv 0,1 \pmod 3$ a současně $n \equiv 0 \pmod s$, kde s je počet střelnic, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ existuje rozpis turnaje, který je harmonický.*

Důkaz. Na základě konstrukce I sestavíme BTD(n), který představuje ideální rozdělení zápasů pro $2n$ hráčů na n stanovištích. Abychom mohli rozdělit zápasy turnaje na s střelnic, musíme každé kolo (sloupec) designu rozdělit do p podskupin. Každý sloupec designu rozdělíme na p kratších sloupců. Výsledná tabulka losování tak bude řádu $n \cdot p \times s$.

Tabulka 9 je příkladem, jak vypadá takto vytvořený rozpis pro 8 hráčů na 2 střelnicích, přičemž jsme využili BTD(4) (tabulka 8). Odpovídající tabulka HAP s vyznačenými brejky je pak uvedena jako tabulka 10. Počet brejků odpovídá minimálnímu počtu 6.

	1.		2.		3.		4.		5.		6.		7.	
1.st.	1 6	∞ 0	4 5	2 0	0 4	3 1	3 ∞	4 2	2 6	5 3	1 2	6 4	0 5	∞ 6
2.st.	3 4	5 2	1 ∞	6 3	5 6	∞ 2	6 0	1 5	0 1	∞ 4	5 ∞	3 0	2 3	4 1

Tabulka 9: Rozpis pro 8 hráčů na 2 střelnicích

tým,kolo	1	2	3	4	5	6	7
0	P	<u>*P*</u>	L	P	L	P	L
1	L	<u>*L*</u>	P	L	P	L	P
2	P	L	P	<u>*P*</u>	L	P	L
3	L	P	L	<u>*L*</u>	P	L	P
4	P	L	P	L	P	<u>*P*</u>	L
5	L	P	L	P	L	<u>*L*</u>	P
6	P	L	P	L	P	L	P
∞	L	P	L	P	L	P	L

Tabulka 10: HAP tabulka pro 8 hráčů

Takto vytvořený rozpis turnaje splňuje podmínky harmonického losování:

- Kompaktnost.
  Rozpis je vytvořen z BTD(n), kde každý hráč hraje v každém kole právě jednou a dojde-li k rozdělení kol na jednotlivá podkola, tato podmínka se nijak nenaruší. Každého kola se tak účastní všichni hráči, jelikož počet hráčů $2n$ je dělitelný dvojnásobkem počtu střelnic.

- Nejmenší možný počet brejků.
  Každý hráč střídá co nejlépe pozice vlevo a vpravo, což je zajištěno orientací hran z Věty 2.10, která říká, že při takto zvolené orientaci hran dosáhneme nejmenšího možného počtu $2n - 2$ brejků.

- Pravidelné střídání hráčů na jednotlivých střelnicích.
  Z vlastností BTD(n) vyplývá, že v případě, kdy kolo nedělíme, každý hráč odehraje na každé střelnici právě dva zápasy a na jedné ze střelnic pouze jeden zápas. V případě rozložení kol do podkol lze na základě vlastností BTD(n) určit, kolik zápasů každý hráč na dané střelnici odehraje. Jestliže kolo rozdělíme do p podkol, $p = \frac{n}{s}$, pak každý z hráčů odehraje právě $2p$ zápasů na každé střelnici, kromě jedné střelnice, kde odehraje jen $2p - 1$ zápasů.

- Pauzy mezi zápasy.
  Délku pauzy d počítáme na základě počtu podkol dvou po sobě jdoucích kol, což můžeme vyjádřit vztahem $2 \cdot \frac{n}{s}$, kde $\frac{n}{s}$ je počet podkol jednoho kola. Pro výpočet nejdelší pauzy budeme předpokládat, že daný hráč hraje v prvním podkole prvního kola a poté až v posledním podkole druhého kola. Od uvedeného vztahu tak stačí odečíst právě 2 podkola, kterých se daný hráč účastní. Výsledný vztah pro nejdelší pauzu mezi zápasy je $d = 2 \cdot \frac{n}{s} - 2$ podkol.
  Pauzy tedy mohou být v rozmezí $0 \leq d \leq (2 \cdot \frac{n}{s} - 2)$ podkol.

Z tabulky 9 je vidět, že turnaj pro 8 hráčů bude na 2 střelnicích odehrán ve 14 podkolech, kdy hráči budou mít pauzy mezi zápasy délek $(0 - 2)$ zápasy rovnoměrně rozdělené v průběhu turnaje. Tj. každého kola (míněno nerozděleno na podkola) se účastní všichni hráči. □

Konstrukce I je poměrně nenáročná a umožňuje vytvořit harmonické losování pro všechny případy, kdy $n \equiv 0, 1 \pmod 3$. Bohužel pro hodnoty $n \equiv 2 \pmod 3$ musíme hledat další možnosti konstrukce BTD(n). Následující konstrukce II a III společně umožní získat BTD(n) pro n libovolné.

4.3 Konstrukce II - FBTD(n) pro n lichá

Jedná se o konstrukci, na jejímž základě budeme vytvářet BTD(n) pro n lichá s jistou přidanou vlastností. Tento speciálnější typ designu se nazývá „factored“ balanced tournament design, FBTD(n). Konstrukce je komplikovanější, ale zahrnuje některé hodnoty n, pro které konstrukci I nelze použít. Navíc vlastnost factored balanced tournament design umožní konstrukci rozšířit pro všechny hodnoty n.

Definice 4.3.1. *Factored balanced tournament design řádu n, FBTD(n), je BTD(n) definovaný na množině V s takovou vlastností, že v každém řádku existuje n buněk, tzv. faktor, který obsahuje všech $2n$ prvků množiny V.*

V roce 1985 dokázali Lamken a Vanstone tvrzení, že BTD(n) existuje pro všechna n, kromě $n = 2$. Důkaz uvedli s využitím FBTD(n) v [8]. Protože tento důkaz je konstruktivní, uvedeme si zde jeho základní myšlenky. Důkaz lze rozdělit na dvě části v závislosti na paritě n. Začneme konstrukcí pro n lichá.

Věta 4.3.2 *Jestliže n je liché, pak FBTD(n) existuje.*

Důkaz. Nechť $n = 2k+1$ a definujeme množinu $V = \mathbb{Z}_n \times \{1, 2\}$. K zápisu prvků množiny V využijeme indexů. Tj. místo (x, y) budeme zapisovat x_y, tedy $V = \{0_1, 0_2, 1_1, 1_2, ..., (2k)_1, (2k)_2\}$. Nyní sestavíme tabulku řádu $(2k + 1) \times (4k + 1)$, kde řádky indexujeme $0, ..., 2k$ (prvky grupy $\mathbb{Z}_{2k+1}$) a sloupce indexujeme $0, ..., 4k$. Tabulka (viz tabulka 11) je z důvodu nedostatku místa zobrazena trasponovaná. V řádku 0 přiřadíme každé buňce jednu uspořádanou dvojici dle vzorce v tabulce a následně vytvoříme další řádky. Řádek i dostaneme z řádku 0 přičtením indexu i ke každému prvku ve dvojici.

Tabulku lze také vytvořit dle následujícího vzorce pro i tý řádek S_i, kde $i = 0, ..., 2k$

$$S_i = \{i_1, i_2\} \cup \{(x + i)_s, (-x + i)_t\} : x = 1, 2, ..., k \tag{2}$$

a kde (s, t) postupně nabývá hodnot $(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)$.

Takto vytvořená tabulka obsahuje všechny neuspořádané dvojice z množiny V, neboli všechny zápasy turnaje. V nultém řádku tabulky se každý prvek množiny V vyskytuje právě dvakrát, až na prvky 0_1 a 0_2. Každý další řádek tabulky je vytvořen z nultého řádku přičtením indexu řádku ke každému prvku dvojice, a proto můžeme říct, že se ve všech řádcích tabulky vyskytuje daný prvek nejvýše dvakrát, což odpovídá řádkové podmínce BTD(n). Navíc dvojice prvků ve sloupcích $0, ..., 2k$ tvoří v každém řádku faktor, tzn. každý prvek se zde vyskytuje právě jednou.

Sloupce $0, 2k + 1, 2k + 2, ..., 4k$ obsahují všechny prvky množiny V právě jednou. Avšak sloupce $1, ..., 2k$ obsahují prvky množiny V dvakrát, čímž tyto sloupce porušují podmínku BTD(n), která říká, že každý prvek V je obsažen právě v jedné buňce každého sloupce. Jestliže vhodně prohodíme některé dvojice prvků v rámci jednoho řádku, můžeme tak splnit sloupcovou podmíku BTD(n), bez narušení řádkové podmínky.

	0	1	...	2k
0	0_1,0_2	1_1,1_2	...	$(2k)_1$,$(2k)_2$
1	1_1,$2k_1$	2_1,0_1	...	0_1,$(2k-1)_1$
2	2_1,$(2k-1)_1$	3_1,$(2k)_1$	...	1_1,$(2k-2)_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
k	k_1,$(k+1)_1$	$(k+1)_1$,$(k+2)_1$	...	$(k-1)_1$,$(k)_1$
k+1	1_2,$2k_2$	2_2,0_2	...	0_2,$(2k-1)_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
2k	k_2,$(k+1)_2$	$(k+1)_2$,$(k+2)_2$	...	$(k-1)_2$,$(k)_2$
2k+1	1_1,$2k_2$	2_1,0_2	...	0_1,$(2k-1)_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
3k	k_1,$(k+1)_2$	$(k+1)_1$,$(k+2)_2$	...	$(k-1)_1$,$(k)_2$
3k+1	1_2,$2k_1$	2_2,0_1	...	0_2,$(2k-1)_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
4k	k_2,$(k+1)_1$	$(k+1)_2$,$(k+2)_1$	...	$(k-1)_2$,$(k)_1$

Tabulka 11: Obecný předpis neuspořádaných dvojic z množiny V

Sloupec i můžeme rozdělit do $(2k+1)/t$ podmnožin obsahujících t dvojic tvaru:

$$\{\{x, x-2i\}, \{x-2i, x-4i\}, \{x-4i, x-6i\}, ..., \{x-2(t-1)i, x\}\},$$

kde t je perioda rovna $-2i \pmod{2k+1}$. Perioda t dělí číslo $2k+1$ a proto musí být lichá. Obdobně můžeme rozdělit i sloupce $k+i$ a $2k+i$. Tyto podmnožiny odpovídají dělení grupy $\mathbb{Z}_{2k+1}$ na cosety (pro nedefinované pojmy z teorie grup, např. [6]).

Prohození dvojic provedeme následovně. Pro každé s liché zaměníme dvojice:

$$\{(x-2si)_1, (x-2(s+1)i)_1\} \quad a \quad \{(x-2si)_2, (x-2(s+1)i)_2\}.$$

Navíc pak ještě prohodíme dva typy dvojic:

$$\{x_2, (x-2i)_2\} \quad a \quad \{x_1, (x-2i)_2\},$$

$$\{(x-2(t-1)i)_1, x_1\} \quad a \quad \{(x-2(t-1)i)_1, x_2\}.$$

Po prohození výše uvedených dvojic je splněna i podmínka pro sloupce, bez narušení podmínky pro řádky, a je zachováno, že každý řádek obsahuje faktor. Výsledná tabulka je tedy FBTD(n). □

Umíme tedy další způsob, jak sestavit BTD(n), pro n lichá, avšak k vytvoření harmonického losování je třeba ještě ošetřit střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo, tzn. zvolit vhodnou orientaci hran. Přiřazení HAP k FBTD(n) Lamken a Vanstone ve své konstrukci [8] neřeší. Pokusíme se najít vlastní orientaci.

Příklad FBTD(n) pro n=5 dle konstrukce II

Jestliže máme počet hráčů $N = 2n = 10$, pak $n = 2k + 1 = 5$ a $k = 2$. Nejdříve si zavedeme množinu $V = \mathbb{Z}_5 \times \{1, 2\}$. Následně prvky množiny V zapíšeme pomocí indexů, $V = \{0_1, 0_2, 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 4_1, 4_2\}$, tj. místo (x, a) píšeme x_a. Dále si pomocí výše uvedeného postupu vytvoříme tabulku o velikosti 5×9, viz tabulka 12.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0_1,0_2	1_1,4_1	2_1,3_1	1_2,4_2	2_2,3_2	1_1,4_2	2_1,3_2	1_2,4_1	2_2,3_1
1	1_1,1_2	2_1,0_1	3_1,4_1	2_2,0_2	3_2,4_2	2_1,0_2	3_1,4_2	2_2,0_1	3_2,4_1
2	2_1,2_2	3_1,1_1	4_1,0_1	3_2,1_2	4_2,0_2	3_1,1_2	4_1,0_2	3_2,1_1	4_2,0_1
3	3_1,3_2	4_1,2_1	0_1,1_1	4_2,2_2	0_2,1_2	4_1,2_2	0_1,1_2	4_2,2_1	0_2,1_1
4	4_1,4_2	0_1,3_1	1_1,2_1	0_2,3_2	1_2,2_2	0_1,3_2	1_1,2_2	0_2,3_1	1_2,2_1

Tabulka 12: Tabulka neuspořádaných dvojic dle vzorce 2 pro 10 hráčů

Můžeme zkontrolovat, že se ve všech řádcích vyskytuje každý prvek množiny V právě dvakrát, kromě prvků ze sloupce 0. Dále vidíme, že ve sloupcích $1, 2, 3, 4$ se vždy každý prvek vyskytuje dvakrát. Proto je nutné provést vhodné prohození dvojic prvků dle důkazu Věty 4.3.2 mezi sloupci $1, 2$ a $3, 4$ a $5, 6$, v rámci odpovídajících řádků. Předtím než uvedené dvojice v rámci řádků prohodíme, provedeme orientaci hran (uspořádání dvojic) tak, abychom určili pozice vlevo a vpravo na střelnici.

Orientaci zvolíme následovně:
V rozpisu pro 10 hráčů budeme orientovat hrany dle sloupců, přičemž v sudých sloupcích $0, 6, 8$ s dvojicemi s různými indexy orientujeme hrany jako (x_1, x_2) a v lichých sloupcích $5, 7$ s dvojicemi s různými indexy orientujeme hrany jako (x_2, x_1). V lichých sloupcích $1, 3$ s dvojicemi se stejnými indexy a s periodou $-2i = -2 \pmod 5 = 3$ i v sudých sloupcích $2, 4$ s dvojicemi se stejnými indexy a s periodou $-2i = -4 \pmod 5 = 1$ orientujeme hrany ve směru přičítání periody. Rozpis, ve kterém je zohledněno střídání hráčů na levé a pravé straně střelnice, je v tabulce 13.

Tabulka HAP s vyznačenými brejky je v tabulce 14. S využitím výše popsané orientace jsme tedy pro 10 hráčů obdrželi celkem 28 brejků. Každý hráč má během turnaje právě 2 nebo 4 brejky, navíc každý hráč právě $4\times$ zaujme pozici vlevo a $5\times$ vpravo, nebo naopak. Tedy i když je výsledný počet brejků v celém turnaji mnohem větší než teoretické minimum 8 brejků, počet zápasů odehraných na pozici vpravo, nebo vlevo je mezi hráče rozdělen rovnoměrně. Počty brejků připadající na jednotlivé hráče jsou také rozděleny rovnoměrně

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$0_1,0_2$	$1_1,4_1$	$2_1,3_1$	$1_2,4_2$	$2_2,3_2$	$4_2,1_1$	$2_1,3_2$	$1_2,4_1$	$3_1,2_2$
1	$1_1,1_2$	$2_1,0_1$	$3_1,4_1$	$2_2,0_2$	$3_2,4_2$	$0_2,2_1$	$3_1,4_2$	$2_2,0_1$	$4_1,3_2$
2	$2_1,2_2$	$3_1,1_1$	$4_1,0_1$	$3_2,1_2$	$4_2,0_2$	$1_2,3_1$	$4_1,0_2$	$3_2,1_1$	$0_1,4_2$
3	$3_1,3_2$	$4_1,2_1$	$0_1,1_1$	$4_2,2_2$	$0_2,1_2$	$2_2,4_1$	$0_1,1_2$	$4_2,2_1$	$1_1,0_2$
4	$4_1,4_2$	$0_1,3_1$	$1_1,2_1$	$0_2,3_2$	$1_2,2_2$	$3_2,0_1$	$1_1,2_2$	$0_2,3_1$	$2_1,1_2$

Tabulka 13: Tabulka uspořádaných dvojic pro 10 hráčů

a žádný hráč nestřílí více než 3× za sebou na stejné pozici.

tým,kolo	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0_1	L	P	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	P	L	P	L
1_1	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	P	L
2_1	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	L	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L
3_1	L	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	L
4_1	L	P	L	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	L	P	L
0_2	P	L	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	L	P	L	P
1_2	P	L	P	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	P	L	P
2_2	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	P	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P
3_2	P	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	P	L	P	L	P
4_2	P	L	P	L	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	L	P

Tabulka 14: Tabulka HAP pro 10 hráčů

V následující tabulce (tabulka 15) je již provedena výměna odpovídajících dvojic a ve všech sloupcích se vyskytuje každý symbol právě jednou. Tabulka tak odpovídá jak sloupcové, tak i řádkové podmínce BTD(n). V každém řádku je navíc 5 buněk, které tvoří faktor a tedy výsledná tabulka je FBTD(5).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$0_1,0_2$	$1_1,4_1$	$2_1,3_1$	$4_2,1_1$	$2_1,3_2$	$1_2,4_2$	$2_2,3_2$	$1_2,4_1$	$3_1,2_2$
1	$1_1,1_2$	$2_1,0_1$	$3_2,4_2$	$2_2,0_2$	$3_1,4_1$	$0_2,2_1$	$3_1,4_2$	$2_2,0_1$	$4_1,3_2$
2	$2_1,2_2$	$1_2,3_1$	$4_1,0_1$	$3_2,1_2$	$4_2,0_2$	$3_1,1_1$	$4_1,0_2$	$3_2,1_1$	$0_1,4_2$
3	$3_1,3_2$	$4_2,2_2$	$0_2,1_2$	$4_1,2_1$	$0_1,1_1$	$2_2,4_1$	$0_1,1_2$	$4_2,2_1$	$1_1,0_2$
4	$4_1,4_2$	$0_2,3_2$	$1_1,2_2$	$0_1,3_1$	$1_2,2_2$	$3_2,0_1$	$1_1,2_1$	$0_2,3_1$	$2_1,1_2$

Tabulka 15: FBTD(5) s ohledem na střídání hráčů vlevo a vpravo

Na závěr provedeme rozmístění zápasů na jednotlivá stanoviště. Jelikož výsledná tabulka rozpisu má 5 řádků, bude vhodné turnaj uspořádat na 5 stanovištích tak, že každý hráč hraje na 4 stanovištích právě 2× a na 1 stanovišti 1×. S tím souvisí i problém rozdělování kol do podkol, který nám shrnuje následující poznámka.

Poznámka 4.3.3 *Je-li počet zápasů jednoho kola větší než počet stanovišť, ale je tímto počtem dělitelný, provedeme rozdělení kol do p podkol stejným způsobem jako u konstrukce I. Při rozdělení do podkol také vzniknou srovnatelné pauzy pro všechny hráče.*

Pro počet hráčů $2n$, kde n je liché, je počet zápasů jednoho kola $\frac{2n}{2} = n$. Je-li počet zápasů n dělitelný počtem střelnic s, platí $n = p \cdot s$, kde $p \in \mathbb{N}$. Stejně jako u konstrukce I tedy můžeme říct, že je-li počet hráčů dělitelný dvojnásobkem počtu střelnic a zároveň n je liché, umíme s využitím FBTD(n) sestavit losování, které se blíží harmonickému a tento výsledek nám shrnuje následující věta.

Věta 4.3.4 *Pro všechna n lichá a současně pro počet hráčů $2n$, $n \equiv 0 \pmod{s}$, kde s je počet střelnic, $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, existuje rozpis turnaje, který je kompaktní a je v něm zajištěno pravidelné střídání hráčů na střelnicích.*

Důkaz. S využitím konstrukce II sestavíme FBTD(n), který nám rozdělí zápasy pro $2n$ hráčů na n stanovišť. Rozdělení zápasů turnaje na s střelnic provedeme stejným způsobem jako u konstrukce I, tj. každé kolo rozdělíme do p podskupin. Výsledná tabulka rozpisu bude řádu $n \cdot p \times s$.

V našem příkladu pro 10 hráčů, tedy $2n = 10$, je počet zápasů jednoho kola $n = 5$. Z toho plyne, že pro 10 hráčů nelze využít menší počet stanovišť než 5, aniž bychom porušili kompaktnost turnaje. Každý z hráčů bude hrát na každé střelnici 2× a na jedné střelnici 1×. Vezmeme-li si však větší počet hráčů, např. $2n = 18$, počet zápasů jednoho kola je $n = 9$. Je tedy zřejmé, že k sestavení losování můžeme využít právě 3 střelnice, neboť platí, že $9 \equiv 0 \pmod{3}$. Každé kolo turnaje rozdělíme do $p = 3$ podskupin a výsledná tabulka bude řádu 27×3. Rozpis vytvořený tímto způsobem nezajišťuje pravidelné střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo, tedy nejmenší možný počet brejků. Můžeme však říci, že tento rozpis turnaje splňuje následující podmínky harmonického losování:

- Kompaktnost.
  Rozpis je vytvořen z FBTD(n), kde každý hráč hraje v každém kole právě jednou a dojde-li k rozdělení kol na jednotlivá podkola, tato podmínka se nijak nenaruší. Každého kola se tak účastní všichni hráči, jelikož počet hráčů $2n$ je dělitelný dvojnásobkem počtu střelnic.

- Pravidelné střídání hráčů na jednotlivých střelnicích.
  Z vlastností FBTD(n) vyplývá, že v případě, kdy kolo nedělíme, každý hráč odehraje na každé střelnici právě dva zápasy a na jedné ze střelnic pouze jeden zápas. Jestliže kolo rozdělíme do p podkol, $p = \frac{n}{s}$, pak každý z hráčů odehraje právě $2p$ zápasů na každé střelnici, kromě jedné střelnice, kde odehraje jen $2p - 1$ zápasů.

- Pauzy mezi zápasy.
  Výpočet nejdelší a nejkratší pauzy provádíme stejným způsobem jako u konstrukce I,

tedy pro výpočet nejdelší pauzy budeme předpokládat, že daný hráč hraje v prvním podkole prvního kola a poté až v posledním podkole druhého kola. Pauzy mohou být v rozmezí $0 \leq d \leq (2 \cdot \frac{n}{s} - 2)$ podkol.
Např. pro počet hráčů $N = 2n = 18$ je počet zápasů jednoho kola $n = 9$, tedy je vhodné využít 3 střelnice. Pauzy mezi zápasy budou pro každého hráče v rozmezí $0 \leq d \leq 4$ podkola, což je ve srovnání s celkovým počtem zápasů jednoho hráče, tj. 17 zápasů, dobrý výsledek. Navíc pauzy pro každého hráče jsou rozděleny rovnoměrně v průběhu celého turnaje. Důvodem je, že každý hráč se účastní každého kola.

$\square$

V příkladu konstrukce II při losování turnaje pro 10 hráčů jsme stanovili orientaci hran, při které byly počty zápasů vlevo a vpravo rozděleny mezi hráče rovnoměrně. V následujícím odstavci je tato orientace zobecněna pro libovolný FBTD(n) konstruovaný dle konstrukce II.

Orientace hran pro konstrukci II

Ve sloupcích $i = 0, 2k{+}1, ..., 3k, 3k{+}1, ..., 4k$ každou dvojici s různými indexy $\{x_1, x_2\}$ orientujeme jako (x_2, x_1) pro i liché a jako (x_1, x_2) pro i sudé. Ve sloupcích $1, 2, ..., k, k + 1, ..., 2k$ každou dvojici se stejnými indexy $\{x_s, y_s\}$ orientujeme v kladném směru cyklu, tedy dle přičítání periody $(-2i) \pmod{2k+1}$. Ve sloupci i, pro $i = 1, 2, ..., k$, dvojici $\{x_s, y_s\}$ orientujeme (x_s, y_s) pro $y_s = x_s + (-2i) \pmod{2k+1}$. Ve sloupci $i + k$, pro $i = 1, 2, ..., k$, dvojici $\{x_s, y_s\}$ orientujeme stejně, tedy (x_s, y_s) pro $y_s = x_s + (-2i) \pmod{2k+1}$.

V rozpisu vytvořeném dle konstrukce II neumíme zajistit nejmenší teoreticky možný počet brejků (dle námi navržené orientace), ale umíme dosáhnout rovnoměrného rozdělení počtu zápasů vlevo a vpravo pro jednotlivé hráče. Tj. každý hráč během turnaje sice nestřídá pozice vlevo a vpravo pravidelně, ale za celý turnaj odehraje stejný počet zápasů (počet se liší o jeden) na obou pozicích.

Věta 4.3.5 *Pro n liché existuje losování dle konstrukce II takové, že každý hráč odehraje n zápasů na jedné pozici (vlevo, nebo vpravo) a $n - 1$ zápasů na druhé pozici.*

Důkaz. Pro $2n$ hráčů, kde n je liché, je turnaj odehrán v $2n - 1$ kolech. Každého kola se účastní všichni hráči, tzn. každý z hráčů během turnaje odehraje právě $2n - 1$ zápasů. Z toho plyne, že žádný hráč nemůže odehrát stejný počet zápasů na pozici vlevo i vpravo, ale nejlépe se počty liší o jeden zápas. Pokusíme se tedy vysledovat, kolik zápasů odehraje každý z hráčů na jednotlivých pozicích. Umístění zápasů na pozicích vlevo a vpravo zvolíme dle obecného předpisu, viz tabulka 11. V tomto rozpisu je splněna řádková podmínka BTD(n), tj. v každém řádku se každý hráč (prvek) vyskytuje nejvýše dvakrát. Hráči, kteří se v řádku (na stanovišti) vyskytují pouze jednou, odehrají svůj jediný zápas na tomto stanovišti vždy v nultém sloupci (kole). Sloupcová podmínka BTD(n) však v tomto obecném předpisu není splněna, konkrétně ve sloupcích $1, ..., 2k$. Ve sloupcích $1, ..., k$ se vyskytují dvojice hráčů, kde indexy (s,t) nabývají hodnot $(1,1)$, a každý hráč s indexem 1 se v takovém sloupci vyskytuje právě $2\times$. Z toho vždy jednou na pozici vlevo a jednou na pozici vpravo. V každém ze sloupců $1,...,k$ se tedy hráči s indexem 1 vyskytují $(2k)\times$. V každém ze sloupců $2k+1,...,4k$ se každý hráč vyskytuje $1\times$. Celkem se tedy ve sloupcích $2k+1,...,3k$ každý hráč s indexem 1 vyskytuje $(k)\times$ vlevo (indexy (s,t) nabývají hodnot $(1,2)$) a ve sloupcích $3k+1,...,4k$ $(k)\times$ vpravo (indexy (s,t) nabývají hodnot $(2,1)$). Můžeme tedy říct, že každý hráč s indexem 1 se na pozici vpravo vyskytuje právě $(2k)\times$ (z toho $(k)\times$ ve sloupcích $1,...,k$ a $(k)\times$ ve sloupcích $3k+1,...,4k$) a na pozici vlevo právě $(2k+1)\times$ (z toho $(k)\times$ ve sloupcích $1,...,k$, $(k)\times$ ve sloupcích $2k+1,...,3k$ a $1\times$ ve sloupci $i=0$). Dále nechť $n=2k+1$, pak řekneme, že hráč odehraje na pozici vpravo právě $n-1$ zápasů a na pozici vlevo právě n zápasů. Obdobně můžeme postupovat pro hráče označené indexem 2. Ukázali jsme tak, že počet zápasů pro každého hráče na levé a pravé straně střelnice je stejný, až na jeden lichý zápas. Prohozením dvojic v řádku tabulky se počet pozic vpravo (resp. vlevo) pro jakéhokoliv hráče nemění.

□

Poznámka 4.3.6 *Orientace hran navržená pro konstrukci II (viz strana 27) zachovává stejné rozložení počtu zápasů na pozicích vlevo a vpravo.*

4.4 Konstrukce III - FBTD(n) pro n sudá

Nyní si ukážeme konstrukci metodou zdvojení. Jedná se o druhou část důkazu, který v roce 1985 prezentovali Lamken a Vanstone [8]. V důkazu využívají ortogonální latinské čtverce, proto ještě před samotným tvrzením uvedeme potřebné definice z oblasti latinských čtverců.

Definice 4.4.1 [9] *Dva latinské čtverce L a $\widehat{L}$ řádu n jsou ortogonální, jestliže pro každé $(x,y) \in E_3 \times E_3$ existuje právě jedna dvojice indexů $(i,j) \in E_1 \times E_2$ taková, že buňka (i,j) latinského čtverce L obsahuje symbol x, $L(i,j) = x$ a buňka (i,j) latinského čtverce $\widehat{L}$ obsahuje symbol y, $\widehat{L}(i,j)=y$. Latinské čtverce $L_1, L_2, \ldots, L_t$ jsou vzájemně ortogonální, jestliže pro $\forall a,b : 1 \leq a < b \leq t$, L_a a L_b jsou ortogonální.*

Větu o existenci dvou ortogonálních latinských čtverců dokázali v roce 1960 Bose, Shrikhande a Parker [2].

Věta 4.4.2 *Dva ortogonální latinské čtverce o straně n existují pro všechna $n \neq 2, 6$.*

Důkaz věty, která následuje, je opět konstruktivní a konstrukci si v jednotlivých krocích ukážeme.

Věta 4.4.3 [8] *Jestliže existuje FBTD(n) a $n > 3$, pak existuje také FBTD(2n).*

Nechť A je FBTD(n) na množině $U = \{1, ..., 2n\}$ a současně označíme $\overline{U} = \{\overline{1}, ..., \overline{2n}\}$. Pak z A získáme A_1 následovně. Prvek a nenahrazujeme jiným prvkem, jestliže je součástí faktoru příslušného řádku (faktor designu, viz Definice 4.3.1). V opačném případě prvek a nahradíme prvkem $\overline{a}$. Opačným způsobem získáme A_2. V každém řádku prvek a nahradíme prvkem $\overline{a}$, je-li součástí faktoru daného řádku. Jinak prvek a nenahrazujeme.

Nechť $B = \begin{array}{|c|}\hline A_1 \\ \hline A_2 \\ \hline \end{array}$ a nechť $V = U \cup \overline{U}$. B je tabulka řádu $2n \times (2n-1)$, která obsahuje dvojice prvků množiny V.

$A =$

$\underline{12}$	67	03	$\underline{70}$	$\underline{34}$	45	$\underline{56}$
35	$\underline{13}$	$\underline{57}$	$\underline{46}$	16	$\underline{20}$	24
47	$\underline{40}$	26	$\underline{15}$	$\underline{27}$	$\underline{36}$	10
$\underline{60}$	$\underline{25}$	$\underline{14}$	23	50	17	$\underline{37}$

$B =$

12	$\overline{67}$	$\overline{03}$	70	34	$\overline{45}$	56
$\overline{35}$	13	57	46	$\overline{16}$	20	$\overline{24}$
$\overline{47}$	40	$\overline{26}$	15	27	36	$\overline{10}$
60	25	14	$\overline{23}$	$\overline{50}$	$\overline{17}$	37
$\overline{12}$	67	03	$\overline{70}$	$\overline{34}$	45	$\overline{56}$
35	$\overline{13}$	$\overline{57}$	$\overline{46}$	16	$\overline{20}$	24
47	$\overline{40}$	26	$\overline{15}$	$\overline{27}$	$\overline{36}$	10
$\overline{60}$	$\overline{25}$	$\overline{14}$	23	50	17	$\overline{37}$

Tabulka 16: A - FBTD(4) a tabulka B

V tabulce 16 je uveden příklad FBTD(4), kde podtržené dvojice prvků tvoří faktor odpovídajícího řádku, a následně je uvedena sestavená tabulka B. Když se daný prvek množiny

U objeví dvakrát v řádku tabulky A, jednou je to v rámci faktoru daného řádku a podruhé mimo faktor. Proto se každý prvek množiny V vyskytne vždy nejvýše jednou v řádku tabulky B.

Vzhledem k tomu, že každá dvojice různých prvků množiny U se vyskytuje v A, pak každá dvojice prvků ve tvaru $\{x, y\}$ nebo $\{\overline{x}, \overline{y}\}$, kde $x \neq y$, musí být obsažena v B. Abychom získali FBTD(n), konkrétně FBTD(8), musíme rozšířit B přidáním dvojic ve tvaru $\{x, \overline{y}\}$, k čemuž nyní využijeme ortogonální latinské čtverce.

Mějme dva ortogonální latinské čtverce C_1 a C_2 řádu $2n$, $n > 3$. Čtverec C_1 obsahuje prvky množiny U a čtverec C_2 prvky množiny $\overline{U}$. Pak C je $2n \times 2n$ tabulka, která vznikla přeložením čtverců C_1 a C_2 přes sebe. Každá dvojice ve tvaru $\{x, \overline{y}\}$ se vyskytuje v C a každý prvek množiny V se vyskytne právě jednou v každém řádku C a právě jednou v každém sloupci C.

Nyní sestavíme výslednou tabulku $D = \boxed{B \mid C}$ řádu $2n \times (4n - 1)$, jejíž buňky jsou vyplněny všemi různými dvojicemi prvků z V. Každý prvek z V se vyskytuje nejvýše dvakrát v každém řádku a právě jednou v každém sloupci. Pro každý řádek platí, že dvojice, které náležely do C, vytváří faktor pro daný řádek. Z toho vyplývá, že D je FBTD(n), konkrétně FBTD(8), viz tabulka 17.

$D =$

12	$\overline{67}$	$\overline{03}$	70	34	$\overline{45}$	56	$0\overline{3}$	$3\overline{0}$	$2\overline{1}$	$5\overline{6}$	$4\overline{7}$	$7\overline{4}$	$6\overline{5}$	$1\overline{2}$
$\overline{35}$	13	57	46	$\overline{16}$	20	$\overline{24}$	$3\overline{5}$	$0\overline{6}$	$1\overline{7}$	$6\overline{0}$	$7\overline{1}$	$4\overline{2}$	$5\overline{3}$	$2\overline{4}$
$\overline{47}$	40	$\overline{26}$	15	27	36	$\overline{10}$	$2\overline{7}$	$1\overline{4}$	$0\overline{5}$	$7\overline{2}$	$6\overline{3}$	$5\overline{0}$	$4\overline{1}$	$3\overline{6}$
60	25	14	$\overline{23}$	$\overline{50}$	$\overline{17}$	37	$5\overline{2}$	$6\overline{1}$	$7\overline{0}$	$0\overline{7}$	$1\overline{6}$	$2\overline{5}$	$3\overline{4}$	$4\overline{3}$
$\overline{12}$	67	03	$\overline{70}$	$\overline{34}$	45	$\overline{56}$	$4\overline{0}$	$7\overline{3}$	$6\overline{2}$	$1\overline{5}$	$0\overline{4}$	$3\overline{7}$	$2\overline{6}$	$5\overline{1}$
35	$\overline{13}$	$\overline{57}$	$\overline{46}$	16	$\overline{20}$	24	$7\overline{6}$	$4\overline{5}$	$5\overline{4}$	$2\overline{3}$	$3\overline{2}$	$0\overline{1}$	$1\overline{0}$	$6\overline{7}$
47	$\overline{40}$	26	$\overline{15}$	$\overline{27}$	$\overline{36}$	10	$6\overline{4}$	$5\overline{7}$	$4\overline{6}$	$3\overline{1}$	$2\overline{0}$	$1\overline{3}$	$0\overline{2}$	$7\overline{5}$
$\overline{60}$	$\overline{25}$	$\overline{14}$	23	50	17	$\overline{37}$	$1\overline{1}$	$2\overline{2}$	$3\overline{3}$	$4\overline{4}$	$5\overline{5}$	$6\overline{6}$	$7\overline{7}$	$0\overline{0}$

Tabulka 17: Výsledný design FBTD(8)

Poznámka 4.4.4 *Existenci dvou vzájemně ortogonálních latinských čtverců nám zajišťuje* Věta 4.4.2. *Důkaz této věty je komplikovaný, proto zde pouze stručně okomentujeme jednotlivé konstrukce, které se liší v závisloti na modularitě n a jsou uvedeny např. v* [9].
Nejprve se zaměříme na konstrukci pro $n \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$. *Je-li* $n = p_1^{r_1}, p_2^{r_2}, ..., p_x^{r_x}$, *kde* $p_1, p_2, ..., p_x$ *jsou prvočísla a* $r_1, r_2, ..., r_x \in \mathbb{N}$, *pak ke konstrukci lze využít konečné těleso a ireducibilní polynomy, tj. polynomy, které nelze rozložit na součin jednodušších polynomů nad tímto tělesem. Je-li* $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_x^{r_x}$, *existuje tzv. přímá konstrukce. Jestliže* A_1 *a* A_2 *jsou dva ortogonální čtverce řádu* m *a* B_1 *a* B_2 *jsou dva ortogonální čtverce řádu n, pak přímou konstrukcí dostaneme čtverce* $A_1 \times B_1$ *a* $A_2 \times B_2$ *řádu mn, které jsou ortogonální.*
Pro $n \equiv 2 \pmod 4$ *existuje konstrukce vycházející z tzv. transversal designu.*

5 Rozpisy dle BTD(n)

5.1 Shrnutí výsledků

K tvorbě rozpisů losování využíváme konstrukce kombinatorických designů. V důkazu následující věty jsou shrnuty možnosti prezentovaných konstrukcí.

Věta 5.1.1 [3] *BTD(n) existuje pro všechna n, s vyjímkou $n = 2$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že BTD(n) neexistuje pro $n = 2$, tedy pro počet hráčů $2n = 4$. Kdybychom pro takto malý počet hráčů chtěli sestrojit BTD(n), pak by tabulku tvořily tři sloupce a dva řádky. Turnaj je tak odehrán ve třech kolech a v každém kole proběhnou právě dva zápasy, viz tabulka 18.

12	13	32
34	24	14

Tabulka 18: Tabulka zápasů pro 4 hráče

Z podmínek pro BTD(n) víme, že se každý prvek musí vyskytovat právě jednou v každém sloupci a nejvýše dvakrát v každém řádku. Z tabulky 18 vidíme, že pokud např. hráč č. 1 hraje v prvních dvou kolech, resp. sloupcích, na prvním stanovišti, resp. řádku, s hráči č. 2 a č. 3, pak musí nutně ve třetím kole hrát na druhém stanovišti s hráčem č. 4. Avšak každého kola se účastní všichni hráči, tudíž tabulku nelze doplnit jinak, než že hráč č. 4 odehraje všechny své zápasy na druhém stanovišti. Podmínka BTD(n) nemůže být splněna, protože hráč č. 4 se vyskytuje ve druhém řádku právě třikrát. Z tohoto důvodu BTD(2) neexistuje. Existence pro všechna n, kromě $n = 2$, vyplývá z konstrukcí prezentovaných v kapitole 4.

Vzhledem k n nyní provedeme shrnutí jednotlivých typů konstrukcí:

1. Pro $n \equiv 0, 1 \pmod 3$ existuje BTD(n), dle Věty 4.2.1.
2. Je-li n liché, pak z Věty 4.3.2 plyne, že FBTD(n) a tedy i BTD(n) pro všechna taková n existuje.
3. Je-li $n = 2^k$, pro $k = 2, 3, ...$, pak existence FBTD(4) a Věta 4.4.3 zaručují existenci FBTD(n) a tedy i BTD(n). Ostatní n můžeme zapsat jako $n = 2^k q$, pro $k = 1, 2, 3, ...$ a q liché, $q > 3$, kde pro n lichá umíme sestavit FBTD(n) dle konstrukce II a poté využít zdvojení dle ortogonálních latinských čtverců, viz konstrukce III.

Tím jsou zahrnuty existence pro všechny možné hodnoty n a ukázali jsme tak, že BTD(n), $n \neq 2$, existuje. □

Nyní provedeme diskuzi pro tři typy prezentovaných konstrukcí, pro hodnoty do 30 hráčů, které odpovídají reálnému počtu hráčů hlásících se do soutěže.

1. Začneme konstrukcí I, kterou lze využít pro počty hráčů $N = 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 26, 30$, tj. $N \equiv 0, 2 \pmod 3$. U této konstrukce umíme pomocí vhodné orientace hran zajistit pravidelné střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo, tedy dostaneme nejmenší možný počet $2n - 2$ brejků. I další požadavky harmonického losování, kompaktnost a střídání hráčů na střelnicích, jsou splněny a v případě, že počet zápasů jednoho kola odpovídá počtu střelnic, jsou zajištěny i stejné pauzy pro všechny hráče mezi odehranými zápasy. Konstrukce I nám tak umožňuje vytvořit ryze harmonické losování. Jestliže počet zápasů jednoho kola přesně neodpovídá počtu střelnic, ale je tímto počtem dělitelný, pak nám konstrukce I dává harmonické losování, viz Věta 4.2.2.

2. Konstrukci II, pro n lichá, lze aplikovat na počty hráčů $N = 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30$. Jak vidíme, počty hráčů $N \equiv 0, 2 \pmod 6$ jsou stejné jako u konstrukce I a je tedy otázkou, která konstrukce pro nás bude výhodnější. U konstrukce II se nám však nepovedlo najít orientaci hran tak, abychom zajistili nejmenší možný počet $2n-2$ brejků a tedy vytvořit harmonický rozpis turnaje. Můžeme však zajistit alespoň rovnoměrné rozdělení hráčů na pozicích vlevo a vpravo během turnaje (Věta 4.3.5). Máme-li tedy pro počty hráčů $N \equiv 0, 2 \pmod 6$ na výběr z konstrukcí I a II, lepší rozpis ve smyslu harmonického losování nám zaručuje konstrukce I. Pro hodnoty $N \equiv 4 \pmod 6 \wedge N \equiv 2 \pmod 4$ musíme využít konstrukci II.

3. Pro n sudá, tedy počty hráčů $N = 8, 12, 16, 20, 24, 28$, lze využít konstrukci III. Tato konstrukce je ze všech nejsložitější, vyžaduje i konstrukci dvou navzájem ortogonálních čtverců, která není jednotná pro všechna n. Z tohoto důvodu se nám u této konstrukce nepodařilo najít jednotný způsob, jak vhodně provést orientaci hran tak, abychom dosáhli co možná nejmenšího počtu brejků, nebo pravidelného rozdělení zápasů vlevo a vpravo mezi hráče. Počty hráčů $N \equiv 0, 2 \pmod 6$ jsou však také zahrnuty pod konstrukcí I a pouze pro hodnoty $N \equiv 4 \pmod 6 \wedge N \equiv 0 \pmod 4$ nemáme jinou možnost, než využít konstrukci III.

Závěrem můžeme říct, že harmonické či ryze harmonické losování lze vytvořit pro počty hráčů $N \equiv 0, 2 \pmod 3$ splňující požadavky konstrukce I, která je zároveň nejjednodušší. Pro počty hráčů $N \equiv 4 \pmod 6 \wedge N \equiv 2 \pmod 4$ využijeme konstrukci II, která nám dává losování, jenž splňuje kompaktnost a pravidelné střídání hráčů na střelnicích se stejným počtem zápasů vlevo a vpravo pro každého hráče. Pro zbylé počty hráčů, tj. $N \equiv 4 \pmod 6 \wedge N \equiv 0 \pmod 4$ využijeme konstrukci III, která rovněž zaručuje kompaktnost a pravidelné střídání hráčů na střelnicích, ale je třeba zkonstruovat také dva ortogonální latinské čtverce řádu $2n$.

5.2 Diskuze složitosti úlohy

K nalezení rozpisu využíváme v práci poměrně složité konstrukce kombinatorických designů. Otázkou je, jestli by nebylo vhodnější využití výpočetní techniky k vygenerování tabulky odpovídající požadavkům harmonického losování. Pokusíme se tedy prozkoumat složitost algoritmu sestavení tabulky BTD(n) hrubou silou - bez využití kombinatorických konstrukcí. Abychom mohli porovnávat efektivitu jednotlivých algoritmů, využijeme pojem asymptotické složitosti.

Asymptotická složitost určuje náročnost algoritmu tak, že zjišťuje, jakým způsobem se mění chování algoritmu v závislosti na změně velikosti vstupních dat. Tato složitost se značí pomocí tzv. Omikron notace („velké O notace“).

Nyní se zaměříme na určení složitosti algoritmu, který by generoval tabulky o rozměrech $n \times 2n - 1$ a kontroloval, zda splňují vlastnosti BTD(n). Chceme-li určit počet možností, jak vygenerovat takovou tabulku řádu $n \times 2n - 1$, ze které by bylo možno vybrat BTD(n), vezmeme v úvahu sloupcovou podmínku. Pro sudý počet hráčů $2n$ bude tabulka složena z $2n-1$ sloupců, přičemž v rámci každého sloupce lze určit počet možností, jak zde umístit symboly (hráče). Tento počet možností je dán permutací $2n$ symbolů, $P = (2n)!$. Uvedenému vztahu pak odpovídá superexponenciální složitost:

$$(2n)! \approx O(2^{(2^n)}).$$

Tato složitost nám říká, že pro vstupní parametr n provede algoritmus $2^{(2^n)}$ operací, což v našem případě odpovídá počtu možností vygenerování jednoho sloupce tabulky. Pro celou tabulku bude počet možností umístění symbolů (hráčů) $P = ((2n)!)^{2n-1}$.

Vezmeme-li si konkrétní příklad rozpisu turnaje, např. pro malý počet hráčů $2n = 8$, čemuž odpovídá BTD(4), pak je pro každý sloupec $P = (2n)! = 8! = 40320$ možností pro umístění symbolů. To odpovídá složitosti $O(2^{(2^n)}) = O(65536)$, tedy pro $n = 4$ bude potřeba provést 65536 operací. Celá tabulka je složena ze sedmi sloupců, proto výsledný počet možností umístění symbolů je $P = ((8)!)^7 = 1,73 \cdot 10^{32}$ a odpovídající složitost je řádově $O(65536)^7 = 5,19 \cdot 10^{33}$ operací. Předpokládáme-li, že jedna operace trvá 1 ns, algoritmu by trvalo prověření takových tabulek asi $1,64 \cdot 10^{17}$ let.

Protože složitost je superexponenciální, bude pro větší hodnoty n čas běhu algoritmu růst tak, že se v reálném čase nebude možné dočkat jeho výstupu. Je tedy potřeba najít jiný systematický postup, založený na teoretickém rozboru, který by umožnil sestrojit losování.

Abychom viděli, jak rychle narůstá počet potřebných operací pro některé další hodnoty hráčů $2n$, uvádíme zde následující tabulku, viz tabulka 19.

2n	8	16	24	32	40
$O(2^{(2^n)})^{(2n-1)}$	$5,19 \cdot 10^{33}$	$(1,16 \cdot 10^{77})^{15}$	$(1,04 \cdot 10^{1233})^{23}$	$(2 \cdot 10^{19728})^{31}$	$(2^{1048576})^{39}$

Tabulka 19: Počet operací

6 Příklady rozpisů

Příklad kompaktního losování pro 24 hráčů dle konstrukce I

Příklad rozpisu turnaje pro počet hráčů $2n = 24$ s využitím BTD(n) pro n=12 dle konstrukce I, zde uvádíme proto, abychom ukázali rozdělení kol na podkola. Pro tento počet hráčů je celkový počet zápasů $Z = \binom{2n}{2} = n \cdot (2n-1) = 12 \cdot 23 = 276$, počet kol je $m = 2n-1 = 23$ a počet zápasů jednoho kola $k = n = 12$. Jelikož je počet zápasů jednoho kola dělitelný beze zbytku počtem stanovišť $s = 3, 4$, kolo turnaje tak můžeme rozdělit buď na 3 nebo na 4 podkola.

Nejdříve sestrojíme tabulku A o velikosti 12×23, kde je i tý sloupec tabulky dán vzorcem (1) ze strany 17

$$F_i = F_0 + i = [\{\infty, i\} \ \cup \{k+i, -k+i\} : k = 1, ..., 11]^T,$$

pro $i = 0, 1, ..., 22$. Řádky jsou označeny pomocí rozdílů mezi prvky odpovídajících dvojic, modulo 23. Tabulka A je z důvodu nedostatku místa zobrazena transponovaná a vidíme ji v tabulce 20.

∞	± 2	± 4	± 6	± 8	± 10	± 11	± 9	± 7	± 5	± 3	± 1
∞ 0	1 22	2 21	3 20	4 19	5 18	6 17	7 16	8 15	9 14	10 13	11 12
∞ 1	2 0	3 22	4 21	5 20	6 19	7 18	8 17	9 16	10 15	11 14	12 13
∞ 2	3 1	4 0	5 22	6 21	7 20	8 19	9 18	10 17	11 16	12 15	13 14
∞ 3	4 2	5 1	6 0	7 22	8 21	9 20	10 19	11 18	12 17	13 16	14 15
∞ 4	5 3	6 2	7 1	8 0	9 22	10 21	11 20	12 19	13 18	14 17	15 16
∞ 5	6 4	7 3	8 2	9 1	10 0	11 22	12 21	13 20	14 19	15 18	16 17
∞ 6	7 5	8 4	9 3	10 2	11 1	12 0	13 22	14 21	15 20	16 19	17 18
∞ 7	8 6	9 5	10 4	11 3	12 2	13 1	14 0	15 22	16 21	17 20	18 19
∞ 8	9 7	10 6	11 5	12 4	13 3	14 2	15 1	16 0	17 22	18 21	19 20
∞ 9	10 8	11 7	12 6	13 5	14 4	15 3	16 2	17 1	18 0	19 22	20 21
∞ 10	11 9	12 8	13 7	14 6	15 5	16 4	17 3	18 2	19 1	20 0	21 22
∞ 11	12 10	13 9	14 8	15 7	16 6	17 5	18 4	19 3	20 2	21 1	22 0
∞ 12	13 11	14 10	15 9	16 8	17 7	18 6	19 5	20 4	21 3	22 2	0 1
∞ 13	14 12	15 11	16 10	17 9	18 8	19 7	20 6	21 5	22 4	0 3	1 2
∞ 14	15 13	16 12	17 11	18 10	19 9	20 8	21 7	22 6	0 5	1 4	2 3
∞ 15	16 14	17 13	18 12	19 11	20 10	21 9	22 8	0 7	1 6	2 5	3 4
∞ 16	17 15	18 14	19 13	20 12	21 11	22 10	0 9	1 8	2 7	3 6	4 5
∞ 17	18 16	19 15	20 14	21 13	22 12	0 11	1 10	2 9	3 8	4 7	5 6
∞ 18	19 17	20 16	21 15	22 14	0 13	1 12	2 11	3 10	4 9	5 8	6 7
∞ 19	20 18	21 17	22 16	0 15	1 14	2 13	3 12	4 11	5 10	6 9	7 8
∞ 20	21 19	22 18	0 17	1 16	2 15	3 14	4 13	5 12	6 11	7 10	8 9
∞ 21	22 20	0 19	1 18	2 17	3 16	4 15	5 14	6 13	7 12	8 11	9 10
∞ 22	0 21	1 20	2 19	3 18	4 17	5 16	6 15	7 14	8 13	9 12	10 11

Tabulka 20: Tabulka A pro 24 hráčů

Nyní provedeme orientaci hran v řádcích s označením ± 4, ± 8, ± 11, ± 7 a ± 3, přeuspořádání řádků tabulky i prohození odpovídajících dvojic, čímž získáme BTD(12), viz tabulka 21. Dvojice, které byly prohozeny jsou vyznačeny tučně.

∞	± 2	± 6	± 10	± 9	± 5	± 1	± 3	± 7	± 11	± 8	± 4
1 22	∞ **0**	3 20	5 18	7 16	9 14	11 12	13 10	15 8	17 6	19 4	21 2
4 21	2 0	**1** ∞	6 19	8 17	10 15	12 13	14 11	16 9	18 7	20 5	22 3
7 20	3 1	5 22	∞ **2**	9 18	11 16	13 14	15 12	17 10	19 8	21 6	0 4
10 19	4 2	6 0	8 21	**3** ∞	12 17	14 15	16 13	18 11	20 9	22 7	1 5
13 18	5 3	7 1	9 22	11 20	∞ **4**	15 16	17 14	19 12	21 10	0 8	2 6
16 17	6 4	8 2	10 0	12 21	14 19	**5** ∞	18 15	20 13	22 11	1 9	3 7
19 16	7 5	9 3	11 1	13 22	15 20	17 18	∞ **6**	21 14	0 12	2 10	4 8
22 15	8 6	10 4	12 2	14 0	16 21	18 19	20 17	**7** ∞	1 13	5 9	3 11
2 14	9 7	11 5	13 3	15 1	17 22	19 20	21 18	0 16	∞ **8**	4 12	6 10
5 13	10 8	12 6	14 4	16 2	18 0	20 21	22 19	1 17	3 15	**9** ∞	7 11
8 12	11 9	13 7	15 5	17 3	19 1	21 22	0 20	2 18	4 16	6 14	∞ **10**
11 ∞	12 10	14 8	16 6	18 4	20 2	22 0	1 21	3 19	5 17	7 15	9 13
14 10	13 11	15 9	17 7	19 5	21 3	0 1	2 22	4 20	6 18	8 16	∞ **12**
9 17	14 12	16 10	18 8	20 6	22 4	1 2	3 0	5 21	7 19	**13** ∞	11 15
8 20	15 13	17 11	19 9	21 7	0 5	2 3	4 1	6 22	∞ **14**	10 18	12 16
7 0	16 14	18 12	20 10	22 8	1 6	3 4	5 2	**15** ∞	9 21	11 19	13 17
6 3	17 15	19 13	21 11	0 9	2 7	4 5	∞ **16**	8 1	10 22	12 20	14 18
5 6	18 16	20 14	22 12	1 10	3 8	**17** ∞	7 4	9 2	11 0	13 21	15 19
4 9	19 17	21 15	0 13	2 11	∞ **18**	6 7	8 5	10 3	12 1	14 22	16 20
3 12	20 18	22 16	1 14	**19** ∞	5 10	7 8	9 6	11 4	13 2	15 0	17 21
2 15	21 19	0 17	∞ **20**	4 13	6 11	8 9	10 7	12 5	14 3	16 1	18 22
1 18	22 20	**21** ∞	3 16	5 14	7 12	9 10	11 8	13 6	15 4	17 2	19 0
0 21	∞ **22**	2 19	4 17	6 15	8 13	10 11	12 9	14 7	16 5	18 3	20 1

Tabulka 21: BTD(12) s ohledem na střídání hráčů vlevo a vpravo

Jak již bylo řečeno, pro 24 hráčů lze zvolit počet stanovišť $s = 3$ nebo $s = 4$.
Nejprve si zvolíme $s = 3$, tj. $n \equiv 0 \pmod 3$. Ze vztahu pro počet zápasů daného kola $n = p \cdot s$ si vyjádříme počet podkol p, na která kolo rozdělíme. Vyjádřením p z uvedeného vztahu ihned spočítáme, že počet podkol je $p = \frac{n}{s} = \frac{12}{3} = 4$. Zápasy kola rozdělíme do čtyř po sobě jdoucích trojic, první trojici pak necháme v prvním podkole, druhou trojici umístíme do druhého podkola atd. Rozmístění zápasů na 3 stanoviště je uvedeno v tabulce 22. Ve sloupcích jsou stanoviště, v řádcích pak jednotlivá podkola.
Nejdelší pauza je pro tento rozpis $2 \cdot \frac{n}{s} - 2 = 2 \cdot \frac{12}{3} - 2 = 6$ podkol, tedy pauzy jsou v rozmezí $(0 - 6)$ podkol.

	1.stanoviště	2.stanoviště	3.stanoviště			1.stanoviště	2.stanoviště	3.stanoviště
1	1 22 5 18 11 12 17 6	∞ 0 7 16 13 10 19 4	3 20 9 14 15 8 21 2		13	14 10 17 7 0 1 6 18	13 11 19 5 2 22 8 16	15 9 21 3 4 20 ∞ 12
2	4 21 6 19 12 13 18 7	2 0 8 17 14 11 20 5	1 ∞ 10 15 16 9 22 3		14	9 17 18 8 1 2 7 19	14 12 20 6 3 0 13 ∞	16 10 22 4 5 21 11 15
3	7 20 ∞ 2 13 14 19 8	3 1 9 18 15 12 21 6	5 22 11 16 17 10 0 4		15	8 20 19 9 2 3 ∞ 14	15 13 21 7 4 1 10 18	17 11 0 5 6 22 12 16
4	10 19 8 21 14 15 20 9	4 2 3 ∞ 16 13 22 7	6 0 12 17 18 11 1 5		16	7 0 20 10 3 4 9 21	16 14 22 8 5 2 11 19	18 12 1 6 15 ∞ 13 17
5	13 18 9 22 15 16 21 10	5 3 11 20 17 14 0 8	7 1 ∞ 4 19 12 2 6		17	6 3 21 11 4 5 10 22	17 15 0 9 ∞ 16 12 20	19 13 2 7 8 1 14 18
6	16 17 10 0 5 ∞ 22 11	6 4 12 21 18 15 1 9	8 2 14 19 20 13 3 7		18	5 6 22 12 17 ∞ 11 0	18 16 1 10 7 4 13 21	20 14 3 8 9 2 15 19
7	19 16 11 1 17 18 0 12	7 5 13 22 ∞ 6 2 10	9 3 15 20 21 14 4 8		19	4 9 0 13 6 7 12 1	19 17 2 11 8 5 14 22	21 15 ∞ 18 10 3 16 20
8	22 15 12 2 18 19 1 13	8 6 14 0 20 17 5 9	10 4 16 21 7 ∞ 3 11		20	3 12 1 14 7 8 13 2	20 18 19 ∞ 9 6 15 0	22 16 5 10 11 4 17 21
9	2 14 13 3 19 20 ∞ 8	9 7 15 1 21 18 4 12	11 5 17 22 0 16 6 10		21	2 15 ∞ 20 8 9 14 3	21 19 4 13 10 7 16 1	0 17 6 11 12 5 18 22

10	5 13 14 4 20 21 3 15	10 8 16 2 22 19 9 ∞	12 6 18 0 1 17 7 11		22	1 18 3 16 9 10 15 4	22 20 5 14 11 8 17 2	21 ∞ 7 12 13 6 19 0
11	8 12 15 5 21 22 4 16	11 9 17 3 0 20 6 14	13 7 19 1 2 18 ∞ 10		23	0 21 4 17 10 11 16 5	∞ 22 6 15 12 9 18 3	2 19 8 13 14 7 20 1
12	11 ∞ 16 6 22 0 5 17	12 10 18 4 1 21 7 15	14 8 20 2 3 19 9 13					

Tabulka 22: Rozpis pro 24 hráčů na 3 stanovištích

Nyní si zvolíme $s = 4$, tj. $n \equiv 0 \pmod 4$. Vyjádřením p ze vztahu $n = p \cdot s$ dostáváme, že počet podkol je $p = \frac{n}{s} = \frac{12}{4} = 3$. Zápasy kola rozdělíme do tří po sobě jdoucích čtveřic a provedeme rozdělení na podkola. Rozpis pro 24 hráčů na 4 stanovištích je v tabulce 23. Nejdelší pauza je $2 \cdot \frac{n}{s} - 2 = 2 \cdot \frac{12}{4} - 2 = 4$ podkola, tedy pauzy jsou v rozmezí $(0 - 4)$ podkola.

Pro 24 hráčů se nám podařilo vytvořit harmonický rozpis turnaje na 3 i 4 stanovištích. Vhodnější však bude využít 4 stanoviště, pokud to parametry střelnice umožní, jelikož kola se rozdělí pouze do 3 podkol a turnaj tak bude odehrán v kratším čase.

	1.st.	2.st.	3.st.	4.st.			1.st.	2.st.	3.st.	4.st.
1	1 22 7 16 15 8	∞ 0 9 14 17 6	3 20 11 12 19 4	5 18 13 10 21 2		13	14 10 19 5 4 20	13 11 21 3 6 18	15 9 0 1 8 16	17 7 2 22 ∞ 12
2	4 21 8 17 16 9	2 0 10 15 18 7	1 ∞ 12 13 20 5	6 19 14 11 22 3		14	9 17 20 6 5 21	14 12 22 4 7 19	16 10 1 2 13 ∞	18 8 3 0 11 15
3	7 20 9 18 17 10	3 1 11 16 19 8	5 22 13 14 21 6	∞ 2 15 12 0 4		15	8 20 21 7 6 22	15 13 0 5 ∞ 14	17 11 2 3 10 18	19 9 4 1 12 16
4	10 19 3 ∞ 18 11	4 2 12 17 20 9	6 0 14 15 22 7	8 21 16 13 1 5		16	7 0 22 8 15 ∞	16 14 1 6 9 21	18 12 3 4 11 19	20 10 5 2 13 17
5	13 18 11 20 19 12	5 3 ∞ 4 21 10	7 1 15 16 0 8	9 22 17 14 2 6		17	6 3 0 9 8 1	17 15 2 7 10 22	19 13 4 5 12 20	21 11 ∞ 16 14 18
6	16 17 12 21 20 13	6 4 14 19 22 11	8 2 5 ∞ 1 9	10 0 18 15 3 7		18	5 6 1 10 9 2	18 16 3 8 11 0	20 14 17 ∞ 13 21	22 12 7 4 15 19
7	19 16 13 22 21 14	7 5 15 20 0 12	9 3 17 18 2 10	11 1 ∞ 6 4 8		19	4 9 2 11 10 3	19 17 ∞ 18 12 1	21 15 6 7 14 22	0 13 8 5 16 20
8	22 15 14 0 7 ∞	8 6 16 21 1 13	10 4 18 19 5 9	12 2 20 17 3 11		20	3 12 19 ∞ 11 4	20 18 5 10 13 2	22 16 7 8 15 0	1 14 9 6 17 21
9	2 14 15 1 0 16	9 7 17 22 ∞ 8	11 5 19 20 4 12	13 3 21 18 6 10		21	2 15 4 13 12 5	21 19 6 11 14 3	0 17 8 9 16 1	∞ 20 10 7 18 22
10	5 13 16 2 1 17	10 8 18 0 3 15	12 6 20 21 9 ∞	14 4 22 19 7 11		22	1 18 5 14 13 6	22 20 7 12 15 4	21 ∞ 9 10 17 2	3 16 11 8 19 0
11	8 12 17 3 2 18	11 9 19 1 4 16	13 7 21 22 6 14	15 5 0 20 ∞ 10		23	0 21 6 15 14 7	∞ 22 8 13 16 5	2 19 10 11 18 3	4 17 12 9 20 1
12	11 ∞ 18 4 3 19	12 10 20 2 5 17	14 8 22 0 7 15	16 6 1 21 9 13						

Tabulka 23: Rozpis pro 24 hráčů na 4 stanovištích

Konstrukci I nelze využít pro počty hráčů $2n$, kde $n \equiv 1 \pmod 3$, tzn. 10, 16, 22 atd. Abychom mohli zkonstruovat rozpis turnaje i pro tyto počty hráčů, lze využít konstrukce

II a III. Ty jsou sice obecnější, ale komplikovanější a nepodařilo se nám nalézt související HAP s minimálním počtem brejků.

Návrh nekompaktního losování pro 14 hráčů dle konstrukce I

Případ, kdy počet zápasů kola není dělitelný počtem stanovišť (střelnic), ukážeme na příkladu pro 14 hráčů s využitím BTD(n) pro $n = 7$ dle konstrukce I.

Pro počet hráčů 14 sestrojíme tabulku A o velikosti 7×13, kde i tý sloupec tabulky je dán vzorcem (1) ze strany 17

$$F_i = F_0 + i = [\{\infty, i\} \ \cup \{k + i, -k + i\} : k = 1, ..., 6]^T,$$

pro $i = 0, 1, ..., 12$. Z důvodu nedostatku místa je tabulka A zobrazena transponovaná a můžeme ji vidět v tabulce 24.

Pro tento počet hráčů je celkový počet zápasů $Z = \binom{2n}{2} = n \cdot (2n - 1) = 7 \cdot 13 = 91$, počet kol je $m = 2n - 1 = 13$ a počet zápasů jednoho kola $k = n = 7$. Jelikož je počet zápasů jednoho kola prvočíslo, nelze kolo turnaje rozdělit na podkola se stejným počtem zápasů. Zvolíme-li počet stanovišť 4, rozdělíme tak každé kolo na dvě podkola, přičemž ve druhém podkole nebude obsazeno právě jedno stanoviště.

∞	± 2	± 4	± 6	± 5	± 3	± 1
∞ 0	1 12	2 11	3 10	4 9	5 8	6 7
∞ 1	2 0	3 12	4 11	5 10	6 9	7 8
∞ 2	3 1	4 0	5 12	6 11	7 10	8 9
∞ 3	4 2	5 1	6 0	7 12	8 11	9 10
∞ 4	5 3	6 2	7 1	8 0	9 12	10 11
∞ 5	6 4	7 3	8 2	9 1	10 0	11 12
∞ 6	7 5	8 4	9 3	10 2	11 1	12 0
∞ 7	8 6	9 5	10 4	11 3	12 2	0 1
∞ 8	9 7	10 6	11 5	12 4	0 3	1 2
∞ 9	10 8	11 7	12 6	0 5	1 4	2 3
∞ 10	11 9	12 8	0 7	1 6	2 5	3 4
∞ 11	12 10	0 9	1 8	2 7	3 6	4 5
∞ 12	0 11	1 10	2 9	3 8	4 7	5 6

Tabulka 24: Tabulka A pro 14 hráčů

Dále následuje orientace hran, prohození odpovídajících dvojic a přeuspořádání řádků tabulky. Výsledný BTD(7) s ohledem na střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo je zobrazen v tabulce 25 a jsou opět vyznačeny dvojice, které byly prohozeny. Také se nám podařilo docílit nejmenšího možného počtu $2n - 2 = 12$ brejků, viz tabulka HAP (tabulka 26).

∞	± 2	± 6	± 3	± 1	± 5	± 4
1 12	∞ **0**	3 10	5 8	7 6	9 4	11 2
4 11	2 0	**1** ∞	6 9	8 7	10 5	12 3
7 10	3 1	5 12	∞ **2**	9 8	11 6	0 4
10 9	4 2	6 0	8 11	**3** ∞	12 7	1 5
0 8	5 3	7 1	9 12	11 10	∞ **4**	2 6
3 7	6 4	8 2	10 0	12 11	1 9	**5** ∞
∞ 6	7 5	9 3	11 1	0 12	2 10	4 8
5 9	8 6	10 4	12 2	1 0	3 11	**7** ∞
4 12	9 7	11 5	0 3	2 1	∞ **8**	6 10
3 2	10 8	12 6	1 4	**9** ∞	5 0	7 11
2 5	11 9	0 7	∞ **10**	4 3	6 1	8 12
1 8	12 10	**11** ∞	3 6	5 4	7 2	9 0
0 11	∞ **12**	2 9	4 7	6 5	8 3	10 1

Tabulka 25: BTD(7) s ohledem na střídání vpravo a vlevo

tým, kolo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L
1	L	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P
2	P	L	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L	P	L	P	L
3	L	P	L	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L	P	L	P
4	P	L	P	L	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L	P	L
5	L	P	L	P	L	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L	P
6	P	L	P	L	P	L	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L
7	L	P	L	P	L	P	L	P	$\underline{P}$	L	P	L	P
8	P	L	P	L	P	L	P	L	P	$\underline{P}$	L	P	L
9	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	$\underline{P}$	L	P
10	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	$\underline{P}$	L
11	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	$\underline{P}$
12	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P
∞	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L

Tabulka 26: HAP pro 14 hráčů dle konstrukce I

Nakonec je potřeba rozdělit zápasy turnaje na jednotlivá stanoviště. Na prvních třech střelnicích je počet podkol jednoho kola $p = 2$ a každý hráč zde bude hrát právě $(2p)\times$, tj. $4\times$ a na jedné z nich $(2p-1)\times$, tj. $3\times$. Na poslední střelnici pak někteří hráči hrají $(2p)\times$, tj. $2\times$ a někteří $(2p-1)\times$, tj. $1\times$, přičemž $p = 1$, jelikož poslední střelnice je obsazena vždy jen v jednom podkole. Výsledný rozpis turnaje pro 14 hráčů je v tabulce 27.

	1. stanoviště	2. stanoviště	3. stanoviště	4. stanoviště
1	1 12 7 6	∞ 0 9 4	3 10 11 2	5 8
2	4 11 8 7	2 0 10 5	1 ∞ 12 3	6 9
3	7 10 9 8	3 1 11 6	5 12 0 4	∞ 2
4	10 9 3 ∞	4 2 12 7	6 0 1 5	8 11
5	0 8 11 10	5 3 ∞ 4	7 1 2 6	9 12
6	3 7 12 11	6 4 1 9	8 2 5 ∞	10 0
7	∞ 6 0 12	7 5 2 10	9 3 4 8	11 1
8	5 9 1 0	8 6 3 11	10 4 7 ∞	12 2
9	4 12 2 1	9 7 ∞ 8	11 5 6 10	0 3
10	3 2 9 ∞	10 8 5 0	12 6 7 11	1 4
11	2 5 4 3	11 9 6 1	0 7 8 12	∞ 10
12	1 8 5 4	12 10 7 2	11 ∞ 9 0	3 6
13	0 11 6 5	∞ 12 8 3	2 9 10 1	4 7

Tabulka 27: Rozpis pro 14 hráčů na 4 stanovištích

Příklad losování pro 14 hráčů dle konstrukce II

Opět uvažujeme případ, kdy počet zápasů kola není dělitelný počtem stanovišť (střelnic) pro 14 hráčů, avšak nyní s využitím FBTD(n) pro $n = 7$ dle konstrukce II. V tomto příkladu ukážeme také orientaci hran uvedenou v konstrukci II.

Nechť počet hráčů je $N = 2n = 14$, pak $n = 2k + 1 = 7$ a $k = 3$. Zavedeme množinu $V = \mathbb{Z}_7 \times \{1, 2\}$ a prvky množiny V zapíšeme pomocí indexů, $V = \{0_1, 0_2, 1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2, 4_1, 4_2\}$.

Dále si vytvoříme tabulku dle vzorce (2) pro i tý řádek S_i ze strany 22

$$S_i = \{i_1, i_2\} \cup \{(x+i)_s, (-x+i)_t\} : x = 1, 2, 3,$$

kde $i = 0, ..., 6$ a kde (s, t) postupně nabývá hodnot $(1,1), (2,2), (1,2), (2,1)$, viz tabulka 28.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0_1,0_2	1_1,6_1	2_1,5_1	3_1,4_1	1_2,6_2	2_2,5_2	3_2,4_2	1_1,6_2	2_1,5_2	3_1,4_2	1_2,6_1	2_2,5_1	3_2,4_1
1	1_1,1_2	2_1,0_1	3_1,6_1	4_1,5_1	2_2,0_2	3_2,6_2	4_2,5_2	2_1,0_2	3_1,6_2	4_1,5_2	2_2,0_1	3_2,6_1	4_2,5_1
2	2_1,2_2	3_1,1_1	4_1,0_1	5_1,6_1	3_2,1_2	4_2,0_2	5_2,6_2	3_1,1_2	4_1,0_2	5_1,6_2	3_2,1_1	4_2,0_1	5_2,6_1
3	3_1,3_2	4_1,2_1	5_1,1_1	6_1,0_1	4_2,2_2	5_2,1_2	6_2,0_2	4_1,2_2	5_1,1_2	6_1,0_2	4_2,2_1	5_2,1_1	6_2,0_1
4	4_1,4_2	5_1,3_1	6_1,2_1	0_1,1_1	5_2,3_2	6_2,2_2	0_2,1_2	5_1,3_2	6_1,2_2	0_1,1_2	5_2,3_1	6_2,2_1	0_2,1_1
5	5_1,5_2	6_1,4_1	0_1,3_1	1_1,2_1	6_2,4_2	0_2,3_2	1_2,2_2	6_1,4_2	0_1,3_2	1_1,2_2	6_2,4_1	0_2,3_1	1_2,2_1
6	6_1,6_2	0_1,5_1	1_1,4_1	2_1,3_1	0_2,5_2	1_2,4_2	2_2,3_2	0_1,5_2	1_1,4_2	2_1,3_2	0_2,5_1	1_2,4_1	2_2,3_1

Tabulka 28: Tabulka neuspořádaných dvojic pro 14 hráčů

Nyní provedeme orientaci hran dle jednotlivých sloupců způsobem, který byl popsán v konstrukci II na straně 27. Následuje tabulka, ve které je již orientace hran provedena (viz tabulka 29).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0_1,0_2	1_1,6_1	2_1,5_1	3_1,4_1	1_2,6_2	2_2,5_2	3_2,4_2	6_2,1_1	2_1,5_2	4_2,3_1	6_1,1_2	2_2,5_1	4_1,3_2
1	1_1,1_2	2_1,0_1	3_1,6_1	4_1,5_1	2_2,0_2	3_2,6_2	4_2,5_2	0_2,2_1	3_1,6_2	5_2,4_1	0_1,2_2	3_2,6_1	5_1,4_2
2	2_1,2_2	3_1,1_1	4_1,0_1	5_1,6_1	3_2,1_2	4_2,0_2	5_2,6_2	1_2,3_1	4_1,0_2	6_2,5_1	1_1,3_2	4_2,0_1	6_1,5_2
3	3_1,3_2	4_1,2_1	5_1,1_1	6_1,0_1	4_2,2_2	5_2,1_2	6_2,0_2	2_2,4_1	5_1,1_2	0_2,6_1	2_1,4_2	5_2,1_1	0_1,6_2
4	4_1,4_2	5_1,3_1	6_1,2_1	0_1,1_1	5_2,3_2	6_2,2_2	0_2,1_2	3_2,5_1	6_1,2_2	1_2,0_1	3_1,5_2	6_2,2_1	1_1,0_2
5	5_1,5_2	6_1,4_1	0_1,3_1	1_1,2_1	6_2,4_2	0_2,3_2	1_2,2_2	4_2,6_1	0_1,3_2	2_2,1_1	4_1,6_2	0_2,3_1	2_1,1_2
6	6_1,6_2	0_1,5_1	1_1,4_1	2_1,3_1	0_2,5_2	1_2,4_2	2_2,3_2	5_2,0_1	1_1,4_2	3_2,2_1	5_1,0_2	1_2,4_1	3_1,2_2

Tabulka 29: Tabulka uspořádaných dvojic pro 14 hráčů

Odpovídající HAP tabulka je uvedena v tabulce 30. Celkem jsme tedy pro 14 hráčů obdrželi 54 brejků, přičemž počty zápasů vlevo a vpravo jsou mezi hráči rozděleny rovnoměrně.

tým, kolo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0_1	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	P	L	P	L
1_1	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	P	L	P	L	P	L
2_1	L	P	L	P	L	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	P	L
3_1	L	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L	$\underline{L}$	P	L	P	L
4_1	L	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	P	L	P	L	P	L
5_1	L	P	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L
6_1	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L
0_2	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	L	P	L	P
1_2	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P
2_2	P	L	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	L	P
3_2	P	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	L	P	L	P	L	P
4_2	P	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	L	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	P
5_2	P	L	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	$\underline{L}$	P	L	P	L	P
6_2	P	L	P	L	$\underline{L}$	$\underline{L}$	P	$\underline{P}$	$\underline{P}$	L	P	L	P

Tabulka 30: HAP pro 14 hráčů dle konstrukce II

Nakonec provedeme výměnu odpovídajících dvojic tak, aby se v každém sloupci vyskytoval každý symbol právě jednou. Tabulka tak odpovídá jak sloupcové, tak i řádkové podmínce BTD(7). Každý řádek této tabulky obsahuje navíc 7 buněk, které tvoří faktor a tudíž výsledná tabulka je FBTD(7) (tabulka 31). Z této tabulky je zřejmé, že bude vhodné využít 7 střelnic.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	$0_1,0_2$	$1_1,6_1$	$2_1,5_1$	$3_1,4_1$	$6_2,1_1$	$2_1,5_2$	$4_2,3_1$	$1_2,6_2$	$2_2,5_2$	$3_2,4_2$	$6_1,1_2$	$2_2,5_1$	$4_1,3_2$
1	$1_1,1_2$	$2_2,0_2$	$3_2,6_2$	$4_2,5_2$	$2_1,0_1$	$3_1,6_1$	$4_1,5_1$	$0_2,2_1$	$3_1,6_2$	$5_2,4_1$	$0_1,2_2$	$3_2,6_1$	$5_1,4_2$
2	$2_1,2_2$	$1_2,3_1$	$4_2,0_2$	$5_1,6_1$	$3_2,1_2$	$4_1,0_1$	$5_2,6_2$	$3_1,1_1$	$4_1,0_2$	$6_2,5_1$	$1_1,3_2$	$4_2,0_1$	$6_1,5_2$
3	$3_1,3_2$	$4_1,2_1$	$5_2,1_2$	$6_2,0_2$	$4_2,2_2$	$5_1,1_1$	$6_1,0_1$	$2_2,4_1$	$5_1,1_2$	$0_2,6_1$	$2_1,4_2$	$5_2,1_1$	$0_1,6_2$
4	$4_1,4_2$	$5_2,3_2$	$6_1,2_2$	$0_1,1_1$	$5_1,3_1$	$6_2,2_2$	$0_2,1_2$	$3_2,5_1$	$6_1,2_1$	$1_2,0_1$	$3_1,5_2$	$6_2,2_1$	$1_1,0_2$
5	$5_1,5_2$	$6_2,4_2$	$0_1,3_1$	$1_2,2_2$	$6_1,4_1$	$0_2,3_2$	$1_1,2_1$	$4_2,6_1$	$0_1,3_2$	$2_2,1_1$	$4_1,6_2$	$0_2,3_1$	$2_1,1_2$
6	$6_1,6_2$	$0_1,5_1$	$1_1,4_1$	$3_2,2_1$	$0_2,5_2$	$1_2,4_2$	$2_2,3_2$	$5_2,0_1$	$1_1,4_2$	$2_1,3_1$	$5_1,0_2$	$1_2,4_1$	$3_1,2_2$

Tabulka 31: FBTD(7) s ohledem na střídání pozic vlevo a vpravo

Provedeme-li porovnání konstrukcí I a II na příkladu pro 14 hráčů, ihned vidíme, že vzhledem ke střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo, tedy k počtu brejků, je vhodnější využít konstrukci I, jelikož pomocí konstrukce I jsme docílili nejmenšího možného počtu 12 brejků. U konstrukce II jsme s využitím zvolené orientace obdrželi 54 brejků a střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo bylo rozvrženo rovnoměrně. Další požadavky harmonického losování jako je kompaktnost turnaje, pravidelné střídání na střelnicích a srovnatelné pauzy mezi zápasy jsou splněny u obou konstrukcí.

7 Závěr

V práci jsme vycházeli z reálného problému tvorby rozpisu sportovní střelecké soutěže pořádané formou turnaje. To znamená, že se každý hráč během soutěže utká se všemi ostatními hráči. Cílem této práce bylo nalezení spravedlivého losování turnaje. Na turnaj je tedy kladeno několik požadavků, které vedou k zajištění spravedlivých podmínek pro všechny hráče. Jedno omezení pro férovost turnaje vycházelo z počtu střelnic, na kterých se turnaj odehrával. Dále bylo žádoucí zajistit pravidelné střídání hráčů na jednotlivých střelnicích, přičemž obvykle v reálné soutěži jsou k dispozici $2, 3$ a 4 střelnice. K dalším požadavkům turnaje patřilo to, aby všichni hráči co nejvíce střídali pozice vlevo a vpravo na střeleckých dráhách jedné střelnice a také to, aby měli všichni hráči pokud možno srovnatelné pauzy mezi zápasy. Pro liché počty hráčů byl tento problém vyřešen v bakalářské práci [12]. V této práci jsme se zaměřili především na sudé počty hráčů N, pro něž je vytvoření rozpisu turnaje komplikovanější. K tvorbě rozpisu jsme využívali nejen metody teorie grafů, ale také kombinatorické designy. Na základě existence speciálního typu kombinatorických designů jsme schopni vytvářet rozpisy pro libovolné hodnoty N, až na $N = 4$, kdy počet hráčů je příliš malý. Konstrukce designů jsme navíc pro větší část hodnot parametru N doplnili o způsob, jak zajistit střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo. Jelikož vycházíme ze skutečné soutěže, soustředili jsme se na hodnoty do 30 hráčů.

V kapitole 2 jsme uvedli základní pojmy a definice z oblasti teorie grafů a také jsme nadefinovali některé další pojmy související s turnajem, jimiž jsou např. home-away tabulka a harmonické či ryze harmonické losování. Krátké shrnutí konstrukce rozpisu turnaje dle latinských čtverců, kterou jsme se zabývali v bakalářské práci [12], je uvedeno v kapitole 3. Znovu jsme zde stručně zmínili tvorbu rozpisu pro liché počty hráčů a také jsme uvedli důvody, proč nelze stejné postupy aplikovat i na sudé počty hráčů. Nejobtížnější bylo rozložení zápasů na střelnice, k čemuž nám pro sudé počty hráčů nepostačovaly nástroje teorie grafů, ani latinské čtverce, a proto jsme se rozhodli využít kombinatorické designy, které jsou obsahem 4. kapitoly. Po nahlédnutí do historie teorie designů jsme se v této kapitole podrobně zabývali jednotlivými typy konstrukcí rozpisů, v závislosti na počtu přihlášených hráčů $N = 2n$, které vycházejí ze speciálního typu kombinatorického designu zvaného balanced tournament design s parametrem n - BTD(n). Celkem jsme zde uvedli tři typy konstrukcí a ke každé z nich jsme uvedli příklad pro malý počet hráčů, ze kterého je lépe vidět, jak rozpis vytvořený dle každé z konstrukcí vypadá. První konstrukce využívá BTD(n), další dvě konstrukce pak FBTD(n). Nejobtížnější byla konstrukce III, která navíc využívá i ortogonální latinské čtverce. Přehledné shrnutí jednotlivých typů konstrukcí a jejich vzájemné porovnání jsme uvedli v kapitole 5. V závěru této kapitoly jsme zmínili, pro které počty hráčů lze využít konstrukci I, která je nejjednodušší a dává nejlepší výsledky vzhledem ke spravedlnosti turnaje, a pro které počty hráčů musíme využít zbývající konstrukce. V kapitole 6 jsme uvedli několik příkladů tvorby rozpisů pro větší počty hráčů, na kterých jsme mimo jiné ukázali dělení kol na podkola.

Ryze harmonické losování jsme obdrželi pro počty hráčů $N = 6, 8$ s využitím konstrukce I, jelikož počet zápasů jednoho kola zde přesně odpovídá počtu střeleckých drah, které máme k dispozici. Podařilo se nám tak zcela zajistit všechny požadavky, které jsou na turnaj kladeny. Pro další počty hráčů vyhovující konstrukci I se nám podařilo vytvořit harmonické losování. Počet zápasů jednoho kola již přesně neodpovídá počtu střelnic a je třeba rozdělit každé kolo na podkola. S využitím konstrukce II jsme vytvořili losování, které splňuje kompaktnost, pravidelné střídání hráčů na střelnicích a srovnatelné pauzy mezi zápasy. U tohoto typu konstrukce jsme navrhli orientaci hran, která nám sice nezajistila teoreticky nejmenší možný počet $2n-2$ brejků, avšak v uvedených příkladech se nám podařilo docílit co nejspravedlivějšího střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo a tedy výsledný rozpis se velmi blíží harmonickému losování. Pomocí konstrukce III jsme vytvořili FBTD(n), pro n sudá. Jak již bylo řečeno, tato konstrukce využívá navíc ortogonální latinské čtverce. Konstrukce dvou vzájemně ortogonálních latinských čtverců však není jednotná pro všechna n, a proto jsme nebyli schopni vytvořit obecný předpis pro orientaci hran, která by zajistila střídání hráčů na pozicích vlevo a vpravo.

Původním záměrem práce bylo vytvoření rozpisů reálné sportovní střelecké soutěže a jejich poskytnutí organizátorům soutěže pro použití v praxi. Po získání prvního částečně optimalizovaného výsledku už v době řešení bakalářské práce však zadavatel přestal komunikovat a komunikaci se nepodařilo obnovit. V práci jsme při vytváření rozpisů sportovní střelecké soutěže kombinovali postupy teorie designů spolu s teorií grafů, což považuji za největší přínos této práce. S využitím nástrojů těchto disciplín se nám zejména pro počty hráčů vyhovující konstrukci I, tj. $N \equiv 0, 2 \pmod 3$ podařilo vytvořit harmonické losování. Tato práce mi přinesla mnoho nových a zajímavých poznatků z teorie kombinatorických designů.

8 Literatura

[1] S. BAUMAN, *The Existence of Balanced Tournament Designs and Partitioned Balanced Tournament Designs,* A thesis presented to the University of Waterloo (2001).

[2] R.C. BOSE, S.S. SHRIKHANDE, E.T. PARKER, *Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture,* Canadian Journal of Mathematics **12** (1960), 189–203.

[3] CH.J. COLBOURN, J.H. DINITZ, *Handbook of combinatorial designs,* Boca Raton, CRC Press (2007), ISBN 1-58488-506-8.

[4] *Combinatorial design,*
URL: <http://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorial_design> [cit. 2014-9-2].

[5] J.H. DINITZ, *Designing Schedules for Leagues and Tournaments,* Mathematics and Statistics, University of Vermont.

[6] P. HORÁK, *Algebra a teoretická aritmetika I,* Brno, Masarykova Univerzita (1991), ISBN 80-210-0320-0.

[7] P. KOVÁŘ, *Teorie grafů,* učební text pro VŠB-TU Ostrava, (2012).

[8] E.R. LAMKEN, S.A. VANSTONE, *The existence of balanced tournament designs,* Ars Combinatoria **19** (1977), 157-160.

[9] C.C. LINDNER, C.A. RODGER, *Design Theory,* USA, CRC Press (1997), ISBN 0- 8493-3986-3.

[10] P.J. SCHELLENBERG, G.H.J. van REES, S.A. VANSTONE, *The existence of balanced tournament designs,* Ars Combinatoria **3** (1977), 303-318.

[11] D.R. STINSON, *Combinatorial Designs: Constructions and Analysis,* New York, Springer-Verlag (2004), ISBN 0-387-95487-2.

[12] K. VOLNÁ, *Rozklady grafů při rozpisu střelecké soutěže,* Bakalářská práce (2013).

[13] D. de WERRA, *Scheduling in sports,* North-Holland, **59** (1981), 381-395.

[14] D. de WERRA, *Some models of Graphs for Scheduling sports competitions,* **21** (1988), 47-65.

[15] R. WILSON, *The early history of block designs,* Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, Serie **11** (2003), 267-276.